

# Verallgemeinerung des PLANCKschen Strahlungsgesetzes in $h$ - $c$ - $l$ -Theorien

Von M. STRAUSS

Arbeitsgruppe für Grundlagenforschung der Theorie der Teilchen und Felder,  
Forschungsgemeinschaft der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin  
(Z. Naturforschg. 17 a, 827—847 [1962]; eingegangen am 24. Mai 1962)

In früheren Arbeiten<sup>1–4</sup> wurden einige Ergebnisse mitgeteilt, die sich auf die Verallgemeinerung des PLANCKschen Strahlungsgesetzes bei Berücksichtigung einer dritten Naturkonstante  $l$  beziehen. Im folgenden soll eine zusammenhängende Darstellung dieses Fragenkomplexes gegeben werden.

In Teil I werden nochmals die Gründe dargelegt, die eine Verallgemeinerung des PLANCKschen Gesetzes erwarten lassen. In Teil II wird eine allgemeine thermodynamische Spektraltheorie für einphasige Systeme mit einem thermodynamischen Freiheitsgrad entwickelt. In Teil III wird das gleiche Problem vom Standpunkt der Statistischen Thermodynamik untersucht. Teil IV bringt den axiomatischen Aufbau der Theorie und die allgemeine Diskussion der Ergebnisse. Teil V ist Fragen der modellmäßigen Interpretation gewidmet.

Das Hauptergebnis der Untersuchung (verallgemeinertes Strahlungsgesetz und Konsistenzbedingungen) enthält Andeutungen über die Beschaffenheit einer künftigen  $h$ - $c$ - $l$ -Elektrodynamik und kann umgekehrt als Zulassungskriterium für  $h$ - $c$ - $l$ -Theorien benutzt werden.

## I. Einführung

### 1.

Wie aus den bekannten Überlegungen von BOHR und ROSENFELD<sup>5</sup> hervorgeht, ist die gegenwärtige Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes nur dann konsistent interpretierbar, wenn man von der atomaren Struktur der zur Feldmessung benutzten Probekörper absieht; insbesondere erweist es sich als notwendig, Ladung und Masse der Probekörper unabhängig voneinander beliebig groß machen zu können. Eine solche Voraussetzung widerspricht zwar an sich nicht der Existenz atomarer Teilchen, beschränkt jedoch den legitimen Gültigkeitsbereich der Theorie auf Feldmittelwerte über Gebiete, die sehr groß gegenüber der Ausdehnung atomarer Gebilde sind. Andererseits ist bekannt, daß die gegenwärtige Quantenelektrodynamik auch in atomaren Bereichen bzw. bei sehr hohen Energien eine gute Näherung darstellt. Daraus folgt, daß es eine Verallgemeinerung der gegenwärtigen Quantenelektrodynamik geben muß, die der obengenannten Beschränkung nicht unterliegt, also die Existenz atomarer Teilchen berücksichtigt.

Wie bereits in der genannten Arbeit<sup>5</sup> hervorgehoben wird, beruht die Notwendigkeit, bei der Interpretation der Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes von allen durch die Existenz atomarer Teilchen gegebenen Einschränkungen abzusehen, auf der simplen Tatsache, daß diese Theorie außer  $h$  und  $c$  keine weitere Naturkonstante enthält. Daraus folgt, daß in einer verallgemeinerten Elektrodynamik, die der Existenz atomarer Teilchen Rechnung trägt, eine dritte Naturkonstante auftreten muß. Insbesondere wird in einer einheitlichen Theorie der Fundamentarteilchen, für die stets das Auftreten einer dritten universellen Naturkonstante  $l$  charakteristisch ist, diese Konstante auch in der Theorie des elektromagnetischen Feldes erscheinen. Der naheliegende Einwand, daß  $l$  mit dem Vorhandensein endlicher Ruhmassen verknüpft ist, während für Photonen die Ruhmasse verschwindet, ist aus verschiedenen Gründen nicht stichhaltig. Erstens schließt die dimensionelle Beziehung

$$m_i = \alpha_i h / (c l)$$

nicht aus, daß sich der numerische Faktor  $\alpha_i$  für Photonen zu Null ergibt. Zweitens ist uns über das Verhalten von Photonen bei sehr großer Strahlungs-

<sup>1</sup> M. STRAUSS, Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. zu Berlin **2**, Heft 7, 412 [1960].

<sup>2</sup> M. STRAUSS, Nuovo Cim. X, **19**, 594 [1961].

<sup>3</sup> M. STRAUSS, Phys. Bl. **17**, 452 [1961].

<sup>4</sup> M. STRAUSS, Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math.-Naturwiss. Reihe **11**, Heft 2, 237 [1962].

<sup>5</sup> N. BOHR u. L. ROSENFELD, K. Danske Vidensk. Selsk. **12**, 8 [1933]. — Vgl. auch L. ROSENFELD in „Niels Bohr and the Development of Physics“, McGraw-Hill, New York—London—Paris 1955, p. 70.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition “no derivative works”). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

dichte wie auch über das Verhalten einzelner Photonen extrem hoher Energie nichts bekannt. Insbesondere ist es denkbar, daß bei großer Strahlungsdichte eine Art Wechselwirkung ins Spiel kommt, die eine scheinbare Ruhmasse zur Folge hat. Auch ein Photon sehr hoher Energie könnte durch Wechselwirkung mit sich selbst oder mit den Nullpunktsfeldern der übrigen Teilchen eine scheinbare Ruhmasse erwerben. Tatsächlich sind ja schon in der heutigen Theorie alle reellen Teilchen durch virtuelle Prozesse mit den Nullpunktsfeldern der anderen Teilchen gekoppelt. Dieser Zug der heutigen Theorie wird in einer künftigen einheitlichen Theorie der Fundamentarteilchen zweifellos in verstärkter Form erhalten bleiben. Denkt man etwa an eine Theorie vom HEISENBERGSchen<sup>6</sup> Typ, so beschreibt der Feldoperator zunächst überhaupt kein bestimmtes Teilchenfeld, sondern das Urfeld, das potentiell alle Teilchenfelder enthält. Projiziert man durch entsprechende Matrixbildung die nicht zum betrachteten Symmetrietypus gehörenden Feldanteile weg, so stellt sich bei hinreichender Verdünnung asymptotisch der gewünschte Typ freier Teilchen ein. Zwischen diesen beiden Extremen, gekennzeichnet durch die Begriffe „Urfeld“ und „freie Teilchen“, muß es eine Übergangszone mittlerer Energiedichte geben, in der die  $l$ -Effekte sich als Abweichungen vom gewohnten Verhalten freier Teilchen bemerkbar machen und die daher durch das Auftreten von passend zu definierenden Quasiteilchen zu charakterisieren wäre. In der Tat läßt das verallgemeinerte Strahlungsgesetz u. a. eine Interpretation zu, welche auf die Existenz von Quasiphotonen (Strahlungsquanten mit impulsabhängiger Quasimasse) hinausläuft (s. Abschn. 16). Obgleich derartige  $l$ -Effekte wohl erst bei Energiedichten beträchtlich werden, bei denen die rasche wechselseitige Umwandlung verschiedenartiger (Quasi-)Teilchen ineinander ihre Identifizierung erschwert oder unmöglich macht, verschwinden in der vorliegenden Theorie die  $l$ -Effekte für die Photonen exakt erst im korrespondenzmäßigen Grenzfall  $\nu \rightarrow 0$ , so daß sie im Prinzip als beobachtbar anzusehen sind. (Dies ist auch die nachträgliche Rechtfertigung dafür, daß die

übrigen Teilchenfelder hier nicht explizit berücksichtigt werden.)

Ein weiterer Grund, weshalb in einer einheitlichen Theorie der Fundamentarteilchen mit einer Verallgemeinerung der gegenwärtigen Elektrodynamik gerechnet werden muß, ist folgender: Die MAXWELLSche Theorie, die der heutigen Quantenelektrodynamik zugrunde liegt, nimmt bekanntlich insofern eine Sonderstellung ein, als sie nicht nur LORENTZ-, sondern auch konform-invariant ist<sup>7</sup>. Diese Sonderstellung dürfte in einer einheitlichen Theorie verloren gehen<sup>8</sup>. Die einfachste Annahme darüber, wie dies zustande kommen kann, ist wieder, daß eine absolute Länge in die Theorie eingeht.

## 2.

Der Grund, weshalb wir ein Problem der Elektrodynamik als Studienobjekt wählen, obgleich hier keinerlei experimentelle Tatsachen zu einer Abänderung der Theorie drängen, ist ein rein methodischer.

Für Teilchen mit nicht-verschwindender Ruhmasse  $m$  kann die künftige  $h$ - $c$ - $l$ -Theorie keine korrespondenzmäßige Verallgemeinerung der heutigen Quantenfeldtheorie sein, da der Grenzübergang  $l \rightarrow 0$  zu  $m \rightarrow \infty$  führt, also keinen korrespondenzmäßigen Übergang zur heutigen Theorie ergibt. [Vom Standpunkt der künftigen Theorie stellt die heutige Theorie, soweit sie mit endlichen Ruhmassen (Renormierung) operiert, bereits eine partielle Antizipation der künftigen Theorie dar.] Dieses Fehlen eines Korrespondenzprinzips der üblichen Art unterscheidet die heutige Situation grundsätzlich von der Situation vor Aufstellung der Quantentheorie (oder auch der EINSTEINSchen Relativitäts- und Gravitationstheorie) und hat zur Folge, daß die Zahl der in Betracht zu ziehenden  $h$ - $c$ - $l$ -Theorien unübersehbar ist. Eine Ausnahme bildet hier nur die Elektrodynamik: für sie muß der Übergang  $l \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$  zur MAXWELLSchen Theorie führen, und *dieser Übergang ist mit einem Verschwinden der Ruhmasse auch nach obiger Formel verträglich*. Darüber hinaus muß hier auch der Grenzübergang  $l \rightarrow 0$  zur alten Quan-

<sup>6</sup> H. P. DÜRR, W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER u. K. YAMAZAKI, Z. Naturforsch. **14 a**, 441 [1959]. — H.-P. DÜRR, Z. Naturforsch. **16 a**, 327 [1961]. — H.-P. DÜRR u. W. HEISENBERG, Z. Naturforsch. **16 a**, 726 [1961].

<sup>7</sup> Wir meinen hier natürlich die volle konforme Gruppe in 4 Dimensionen, die gegenüber der LORENTZ-Gruppe fünf zusätzliche echte Erhaltungssätze liefert.

<sup>8</sup> Die Tatsache, daß die HEISENBERGSche nichtlineare Spinorgleichung<sup>6</sup> gegenüber der einparametrischen Gruppe der „Skalentransformationen“  $l \rightarrow \eta l$ ,  $x^\mu \rightarrow \eta x^\mu$ ,  $\psi \rightarrow \eta^{-1/2} \psi$  invariant ist, hat mit konformer Invarianz im genannten Sinne nichts zu tun; insbesondere liefert sie keinen echten (vierdimensionalen) Erhaltungssatz. — Für eine ausführliche Begründung vgl. H. STEUDEL, Z. Naturforsch. **17 a**, 129, 133 [1962].

tenelektrodynamik zurückführen, sofern nur der Koeffizient  $\alpha$  für das Photonenfeld verschwindet.

Da die Grenzübergänge  $l \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$  nicht vertauschbar zu sein brauchen, folgt übrigens, daß die  $h$ - $c$ - $l$ -Elektrodynamik für  $h \rightarrow 0$  nicht unbedingt zu einer vernünftigen oder auch nur konsistenten „klassischen“ Theorie zu führen braucht. Das Suchen nach einer klassischen Verallgemeinerung der MAXWELLSchen Gleichungen, die dann zu quantisieren wäre, ist also methodisch zumindest zweifelhaft. Andererseits ist aber auch der Übergang von der gegenwärtigen ( $h$ - $c$ -)Elektrodynamik zur  $h$ - $c$ - $l$ -Elektrodynamik trotz des hier gültigen Korrespondenzprinzips ein ungelöstes und schwer zu lösendes Problem, da es bisher keinerlei experimentelle Fingerzeige in dieser Richtung gibt.

Dies sind die Gründe, weshalb wir uns im folgenden auf ein spezielles Problem der  $h$ - $c$ - $l$ -Elektrodynamik beschränken, bei dessen Behandlung außer dem Korrespondenzprinzip noch der ganze Apparat der Thermodynamik, einschl. der Statistischen Thermodynamik, zur Verfügung steht. Das dabei erhaltene Resultat ist zwar, entsprechend den sehr allgemeinen Voraussetzungen, selbst noch recht allgemein, hat aber dafür den Vorteil, von willkürlichen Annahmen unabhängig zu sein. Es kann daher als Kriterium für die Zulässigkeit spezieller  $h$ - $c$ - $l$ -Theorien benutzt werden.

### 3.

Die dritte Naturkonstante wird im folgenden durch

$$\nu_0 = c/l_0 \quad (1)$$

repräsentiert; dabei kann  $l_0$  die HEISENBERGSche Elementarlänge oder irgendeine andere universelle Längenkonstante bedeuten. Wir werden sogar den Fall zulassen, daß  $l_0$  eine kosmische Länge ist; der korrespondenzmäßige Übergang zur alten Theorie ist dann nicht durch  $l_0 \rightarrow 0$ , sondern durch  $l_0 \rightarrow \infty$  gegeben. Wichtig ist nur, daß in der Theorie außer der dimensionslosen Variablen

$$x = h\nu/(kT) \quad (2)$$

jetzt noch eine zweite dimensionslose Variable

$$y = \nu/\nu_0 \quad (3)$$

auftritt. Dies hat zur Folge, daß mit der Gültigkeit des WIENSchen Verschiebungsgesetzes nicht mehr zu rechnen ist. In der Tat lauten die Dimensionsformeln

für die Spektralfunktion der Energiedichte

$$h\text{-}c\text{-Theorie:} \quad (a) \quad \varrho(\nu, T) = A \frac{\nu^3 h}{c^3} f(x),$$

$$h\text{-}c\text{-}l\text{-Theorie:} \quad (b) \quad \varrho(\nu, T) = A \frac{\nu^3 h}{c^3} F(x, y). \quad (4)$$

Das WIENSche Verschiebungsgesetz ergäbe sich also nur, wenn die Funktion  $F$  nicht von  $y$  abhängen würde.

Genauer überlegt man folgendermaßen. Wesentlich für die thermodynamische Begründung des WIENSchen Verschiebungsgesetzes sind die beiden Bedingungen

$$\pi(\nu, T) = \frac{1}{3} \varrho(\nu, T), \quad \frac{\delta \nu}{\nu} = - \frac{1}{3} \frac{\delta V}{V} \quad (\text{adiab. Exp.}).$$

Dabei ist  $\pi(\nu, T)$  die thermodynamische Spektralfunktion des Druckes (spektrale Druckdichte). Die hier auftretenden Zahlenfaktoren  $(1/3)$  stammen aber nicht aus der Thermodynamik, sondern aus dem zugrunde gelegten mathematischen Modell des Strahlungsfeldes (MAXWELLSche Theorie, klassisches Photonengas, oder quantisierte MAXWELLSche Theorie). In der allgemeinen thermodynamischen Theorie der Strahlung, die sich nur auf die Existenz der Spektralfunktion  $\varrho(\nu, T)$  stützt, hat man die obigen Gleichungen durch folgende zu ersetzen:

$$\pi(\nu, T) = G(x, y) \varrho(\nu, T) \quad (5)$$

$$\frac{\delta \nu}{\nu} = -g(y) \frac{\delta V}{V} \quad (\text{adiab. Exp.}). \quad (6)$$

Die hier eingeführten dimensionslosen Funktionen  $G$  und  $g$  nennen wir die *thermodynamischen Modellfunktionen*<sup>9</sup> der Strahlung; innerhalb der reinen Thermodynamik spielen sie die Rolle von unbestimmten Parametern. Die Thermodynamik allein liefert nur den *Zusammenhang* der Funktion  $F(x, y)$  mit den beiden Modellfunktionen  $G(x, y)$  und  $g(y)$ . Dieses Problem wird in Teil II gelöst.

### 4.

Ganz analog sieht das Problem vom Standpunkt der statistischen Thermodynamik aus. Wir spalten alle Spektralfunktionen nach dem Vorbild

$$\varrho(\nu, T) = n_\nu(\nu) U^{(\nu)}(\nu, T) \quad (7)$$

auf, wo der erste Faktor die Anzahl der Freiheitsgrade pro Volum- und Frequenzeinheit ist, während

<sup>9</sup> Der Ausdruck *Modellfunktion* soll darauf hinweisen, daß diese Funktionen erst durch ein mathematisches Modell des Strahlungsfeldes bestimmt werden können. Der Zusatz

„thermodynamisch“ dient zur Unterscheidung von den später einzuführenden „statistischen“ Modellfunktionen.

der zweite Faktor den Mittelwert der betreffenden Größe, also hier der Energie, pro Freiheitsgrad darstellt. Da der erste Faktor aus Dimensionsgründen die Form

$$n_v(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \chi(y) \quad (8)$$

hat, tritt hier an Stelle der Funktion  $g(y)$  die Funktion  $\chi(y)$  als Modellfunktion auf. Wenn wir noch die zu einem Freiheitsgrad gehörige Zustandssumme

$$Q^{(\nu)}(\nu, T) = \sum_{(n)} \exp\{-\varepsilon_n(\nu)/kT\} \quad (9)$$

eingeführen und die Dimensionsformel

$$\varepsilon_n(\nu) = h\nu I_n(y) \quad (10)$$

berücksichtigen, so wird klar, daß wir hier an Stelle der einen zweistelligen Funktion  $G(x, y)$  eine Schar von einstelligen Funktionen  $I_n(y)$  als Modellfunktionen haben.

Der Zusammenhang der beiden thermodynamischen Modellfunktionen  $g(y)$  und  $G(x, y)$  mit den statistischen Modellfunktionen  $\chi(y)$  und  $I_n(y)$  wird sich in Teil III herausstellen. — Erst nach Klärung dieser Grundlagen werden wir in Teil IV an den axiomatischen Aufbau der Theorie schreiten.

## II. Thermodynamische Grundlagen

Wir bringen zunächst den mathematischen Apparat der Thermodynamik in eine für unsere Zwecke geeignete Form. Die entscheidenden Gesichtspunkte sind dabei folgende: Erstens haben wir es in der Strahlungstheorie immer mit räumlichen Dichten zu tun. Wir schreiben daher in Abschnitt 5 die Fundamentalgleichungen für die thermodynamischen Potentiale auf Potentialdichten um. Zweitens ist zu berücksichtigen, daß die integrale schwarze Strahlung ein System von nur einem thermodynamischen Freiheitsgrad ist; die entsprechenden Formeln werden in Abschnitt 6 zusammengestellt. Drittens sind die Fragen zu untersuchen, die sich aus der Existenz einer spektralen Energiedichteverteilung  $\varrho(\nu, T)$  ergeben, also vor allem die Frage der Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit von thermodynamischen Spektralfunktionen für die übrigen thermodynamischen Größen. Dies geschieht in Abschnitt 7.

### 5. Potentialdichten

Wir führen programmgemäß zu jedem Potential die entsprechende Dichte ein nach dem Definitionsschema

$$\text{Potentialdichte} = \text{Potential/Volumen.}$$

Selbstverständlich dürfen wir nicht voraussetzen, daß diese Dichten wieder Potentiale sind; sind sie

es, so nennen wir sie *Dichte-Potentiale*.

Es seien also

$$u = U/V = \text{Energiedichte,} \quad (11)$$

$$s = S/V = \text{Entropiedichte,} \quad (12)$$

$$f = F/V = \text{Dichte der freien Energie,} \quad (13)$$

$$j = J/V = \text{MASSIEUSche Dichte,} \quad (14)$$

$$h = H/V = \text{Enthalpiedichte,} \quad (15)$$

$$g = G/V = \text{GIBBSsche Dichte.} \quad (16)$$

Aus der Definition der Funktionen  $F, J, H, G$  folgt dann

$$f = u - Ts, \quad (17)$$

$$j = -u/T + s = -f/T, \quad (18)$$

$$h = u + p, \quad (19)$$

$$g = u - Ts + p = f + p. \quad (20)$$

Die „Fundamentalgleichungen“ (FG) und die zugehörigen Integrabilitätsbedingungen (IB) lauten nun wie folgt<sup>10</sup>:

#### 1. unabhängige Variable: $s, V$

$$du(s, V) = T ds - [p + u - sT] dV/V, \quad (\text{FG}) \quad (21.1)$$

$$T = u_s, \quad (21.2)$$

$$p = -u + s u_s - V u_V, \quad (21.3)$$

$$f = u - s u_s, \quad (21.4)$$

$$j = s - u/u_s, \quad (21.5)$$

$$s T_s - p_s - V T_V = 0; \quad (\text{IB}) \quad (21.6)$$

#### 2. unabhängige Variable: $u, V$

$$ds(u, V) = du/T + [(p + u)/T - s] dV/V, \quad (\text{FG}) \quad (22.1)$$

$$T = 1/s_u, \quad (22.2)$$

$$p = s/s_u - u + V s_V/s_u, \quad (22.3)$$

$$f = u - s/s_u, \quad (22.4)$$

$$j = s - u s_u, \quad (22.5)$$

$$(p + u) T_u - T p_u - V T_V = 0; \quad (\text{IB}) \quad (22.6)$$

#### 3. unabhängige Variable: $T, V$

$$a) \quad df(T, V) = -s dT - [p + f] dV/V, \quad (\text{FG}) \quad (23.1)$$

$$p = -f - V f_V, \quad (23.2)$$

<sup>10</sup> Ein unterer Index bedeutet im folgenden stets Differentiation nach der jeweiligen Variablen.

$$u = f - T f_T, \quad (23.3)$$

$$s = -f_T, \quad (23.4)$$

$$j = -f/T, \quad (23.5)$$

$$p_T - s - V s_V = 0; \quad (\text{IB}) \quad (23.6)$$

$$\text{b) } dj(T, V) = (u/T^2) dT + [p/T - j] dV/V, \quad (\text{FG}) \quad (24.1)$$

$$p = T j + T V j_V, \quad (24.2)$$

$$u = T^2 j_T, \quad (24.3)$$

$$s = j + T j_T, \quad (24.4)$$

$$f = -T j, \quad (24.5)$$

$$T p_T - p - u - V u_V = 0. \quad (\text{IB}) \quad (24.6)$$

Wie man sieht, sind die Potentialdichten  $u(s, V)$ ,  $s(u, V)$ ,  $f(T, V)$ ,  $j(T, V)$  sämtlich Dichtepotentiale. Die Potentialdichten  $h$  und  $g$  sind dagegen keine Potentiale. Es wird nämlich

$$dh = T ds + dp + [T s - h] dV/V, \quad (25)$$

$$dg = dp - s dT - g dV/V. \quad (26)$$

Man hat hier drei Möglichkeiten, unabhängige Variable zu wählen:

$$dh^I(p, V) = [1 + T s_p] dp + [T s - h^I + T V s_V] dV/V,$$

$$dh^{II}(s, V) = [T + p_s] ds + [T s - h^{II} + V p_V] dV/V, \quad (25^{II})$$

$$dh^{III}(s, p) = [T + (T s - h^{III}) V^{-1} V_s] ds + [1 + (T s - h^{III}) V^{-1} V_p] dp, \quad (25^{III})$$

$$dg^I(p, V) = [1 - s T p] dp - [g^I + s V T_V] dV/V, \quad (26^I)$$

$$dg^{II}(T, V) = [p_T - s] dT + [V p_V - g^{II}] dV/V, \quad (26^{II})$$

$$dg^{III}(p, T) = [1 - g^{III} V^{-1} V_p] dp - [s + g^{III} V^{-1} V_T] dT. \quad (26^{III})$$

Offenbar ist keine dieser Funktionen ein Potential für die übrigen Größen. Dies entspricht dem Umstand, daß die Größen  $H$  und  $G$  nur dann Potentiale sind, wenn sie als Funktionen von  $S$ ,  $p$  bzw.  $T$ ,  $p$  aufgefaßt werden, während in den Potentialfunktionen  $U$ ,  $S$ ,  $F$ ,  $J$  stets  $V$  eine der beiden freien Variablen ist.

## 6. Systeme mit einem thermodynamischen Freiheitsgrad

Aus den Fundamentalgleichungen (21.1) bis (24.1) folgt

$$u_V = -T s_V = f_V = -T^{-1} j_V = -g/V. \quad (27)$$

[Die letzte Gleichung ergibt sich aus (20) und (23.2).]

Wie zu erwarten, werden also *alle* Dichtepotentiale  $u(s, V)$ ,  $s(u, V)$ ,  $f(T, V)$ ,  $j(T, V)$  von  $V$  unabhängig, falls *eines* von ihnen von  $V$  unabhängig ist. Die hinreichende und notwendige Bedingung hierfür ist, daß die GIBBSsche Dichte  $g$  verschwindet:

$$g = 0.$$

Systeme mit dieser Eigenschaft heißen *Systeme mit einem thermodynamischen Freiheitsgrad*. Die Wahl zweier unabhängiger Variabler ist dann durch die Wahl *einer* unabhängigen Variablen aus der Reihe

$$T, p, u, s, f, j$$

zu ersetzen. Für das Folgende wählen wir  $T$  als unabhängige Variable und bezeichnen die abhängigen Größen als Funktionen von  $T$  durch ein aufgesetztes „o“:

$$\overset{\circ}{p} = \overset{\circ}{p}(T), \quad \overset{\circ}{u} = \overset{\circ}{u}(T), \quad \text{etc.}$$

Die Gleichungen aus Abschnitt 5 reduzieren sich dann auf folgende Gleichungen:

$$\overset{\circ}{g} = \overset{\circ}{p} + \overset{\circ}{u} - T \overset{\circ}{s} = 0 \quad (28)$$

$$\overset{\circ}{u}_T = T \overset{\circ}{s}_T, \quad \overset{\circ}{f}_T = -\overset{\circ}{s}, \quad (29), (30)$$

$$\overset{\circ}{j}_T = T^{-2} \overset{\circ}{u}, \quad \overset{\circ}{p}_T = \overset{\circ}{s}, \quad (31), (32)$$

$$\overset{\circ}{p} = -\overset{\circ}{f} = T \overset{\circ}{j}, \quad \overset{\circ}{h} = T \overset{\circ}{s}. \quad (33), (34)$$

Aus (28) und (32) folgt noch

$$\boxed{T \overset{\circ}{p}_T - \overset{\circ}{p} - \overset{\circ}{u} = 0} \quad (35)$$

Gilt für die Energiedichte  $\overset{\circ}{u}$  ein  $T^n$ -Gesetz, so wird

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{u} &= (n-1) \overset{\circ}{p} = \frac{n-1}{n} T \overset{\circ}{s} \\ &= (n-1) T \overset{\circ}{j} = \frac{n-1}{n} \overset{\circ}{h} \quad (n \neq 1), \end{aligned}$$

falls die Integrationskonstanten  $= 0$  gesetzt werden.

## 7. Spektraltheorie

Die Theorie der Wärmestrahlung beginnt mit der Feststellung, daß die integrale schwarze Strahlung ein System mit einem thermodynamischen Freiheitsgrad (im Sinne von Abschnitt 6) ist, so daß die Energiedichte nur von der Temperatur abhängt:

$$u = \overset{\circ}{u}(T).$$

Die Spektraltheorie der Wärmestrahlung beginnen

wir mit der (aus den KIRCHHOFFSchen Sätzen ableitbaren) Feststellung, daß es in der unendlichen Mannigfaltigkeit von Spektralfunktionen  $f(\nu, T)$ , definiert durch die Forderung

$$\int_{(\nu)} f(\nu, T) d\nu = \overset{\circ}{u}(T), \quad (36)$$

eine ausgezeichnete Funktion  $f^*(\nu, T)$  mit folgender zusätzlichen Eigenschaft gibt<sup>11</sup>:

Alle Systeme mit einer Energiedichte der Form

$$u(T; \nu_1, \nu_2) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} f^*(\nu, T) d\nu \quad (37)$$

mit beliebigen Werten von  $\nu_1$  und  $\nu_2$  (und mit gleichem  $T$ )<sup>12</sup> sind mit sich selbst (und miteinander)<sup>12</sup> im thermischen Gleichgewicht, so daß auf jedes derartige System die Thermodynamik anwendbar ist<sup>13</sup>.

Zum Unterschied von anderen Spektralfunktionen, die keinerlei physikalische Bedeutung haben, nennen wir diese ausgezeichnete Spektralfunktion die zur Energiedichte  $\overset{\circ}{u}(T)$  gehörende *thermodynamische Spektralfunktion* und bezeichnen sie wie üblich mit  $\varrho(\nu, T)$ :

$$f^*(\nu, T) = \varrho(\nu, T). \quad (38)$$

(Die KIRCHHOFFSchen Sätze besagen noch, daß  $\varrho$  eine „universelle“ Funktion ist, also nur universelle Konstante wie  $k$ ,  $h$ ,  $c$ ,  $l$  enthalten kann.) Durch eine der obigen Forderung analoge Forderung läßt sich der Begriff der thermodynamischen Spektralfunktion für jede beliebige Größe der Art  $\overset{\circ}{a}(T)$  festlegen. Die Hauptfrage, die sich nun ergibt, lautet:

was läßt sich auf Grund der Thermodynamik über die Existenz von thermodynamischen Spektralfunktionen für die übrigen Größen und den Zusammenhang dieser Funktionen aussagen.

Zunächst könnte man versucht sein zu glauben, daß hier überhaupt kein Problem vorliegt, da gemäß Abschnitt 6 durch

$$\overset{\circ}{u}(T) = \int_{(\nu)} \varrho(\nu, T) d\nu \quad (39)$$

alle anderen thermodynamischen Größen (bis auf evtl. Integrationskonstanten) bestimmt sind. So wird z. B., Vertauschbarkeit der Integrationen vorausgesetzt,

$$\overset{\circ}{s}(T) = \int_{(\nu)} d\nu \int \frac{dT'}{T'} \varrho_T(\nu, T'), \quad (40)$$

$$\overset{\circ}{j}(T) = \int_{(\nu)} d\nu \int \frac{dT'}{(T')^2} \varrho(\nu, T'), \quad (41)$$

$$\overset{\circ}{p}(T) = \int_{(\nu)} d\nu T \int \frac{dT'}{(T')^2} \varrho(\nu, T'). \quad (42)$$

Es fragt sich jedoch, ob die hier auftretenden Spektralfunktionen die thermodynamisch „richtigen“ sind. Wären sie es, so gäbe es nur *eine* thermodynamisch unabhängige Spektralfunktion. Um die genannten Fragen zu klären, betrachten wir ein System<sup>14</sup> mit der Energiedichte

$$\hat{u}(\nu; T) = \int_{\nu_{\min}}^{\nu} \varrho(\nu', T) d\nu' \quad (43)$$

<sup>11</sup> Gewöhnlich beruft man sich bei der Einführung der thermodynamischen Spektralfunktion  $\varrho(\nu, T)$  im Anschluß an KIRCHHOFF auf die Proportionalität von spektralem Emissions- und Absorptionsvermögen. Die folgende Charakterisierung stellt einen Versuch dar, ohne eine derartige Berufung auf die Wechselwirkung zwischen Strahlung und ponderabler Materie auszukommen. — Vgl. auch Anm.<sup>13</sup>.

<sup>12</sup> Von diesem Zusatz wird im folgenden kein Gebrauch gemacht.

<sup>13</sup> Hieraus folgt insbesondere, daß die differentielle Energiedichte

$du = u(T; \nu, \nu + d\nu) = f^*(\nu, T) d\nu$  eindeutig durch die Funktion  $f^*$  bestimmt ist und daher mit der beobachteten Energiedichte der Schwarzen Strahlung im Spektralbereich  $[\nu, \nu + d\nu]$  identifiziert werden kann. — Die Frage, ob die beobachtete Spektralverteilung „an sich“ vorhanden ist oder erst durch den Spektralapparat geschaffen wird, ist dabei irrelevant. Auch dies erscheint uns als ein gewisser Vorteil der hier benutzten Methode.

<sup>14</sup> Die Einführung eines derartigen Systems mit abgeschnittenem Spektrum ist absolut unvermeidlich, wenn man aus

der mikroskopischen Spektralvariablen  $\nu$  eine makroskopisch kontrollierbare Größe machen will, wie dies für eine thermodynamische Spektraltheorie unerlässlich ist. Die traditionelle Behandlung des Problems krankt u. a. gerade daran, daß sie dies zu tun unterläßt: sie muß dann zu mikroskopischen Betrachtungen Zuflucht nehmen, die dem Geist der Thermodynamik widersprechen. Ein eklatantes Beispiel hierfür ist die Benutzung der Formel für den DOPPLER-Effekt zur Berechnung der Frequenzänderung bei adiabatischer Expansion. Abgesehen davon, daß es sich hier modellmäßig betrachtet nicht um individuelle DOPPLER-Effekte oder Reflektionen, sondern um ein Eigenwertproblem mit zeitlich variablen Randbedingungen handelt, ist eine derartige mikroskopische Analyse für thermodynamische Zwecke völlig überflüssig. Für unsere Zwecke ist sie zudem unbrauchbar, da wir das richtige  $h$ - $c$ - $l$ -Modell nicht kennen. — PLANCK hat stets betont, daß man einem beliebigen spektralen Teil der schwarzen Strahlung eine Temperatur zuschreiben kann, hat aber die sich daraus ergebende methodische Konsequenz nicht gezogen. Wir gehen hier also einen Schritt in der Richtung, die PLANCK gewiesen hat.

und dem Volumen  $V$ . Da ein solches System zwei thermodynamische Freiheitsgrade besitzt, können auf es die Formeln von Abschnitt 5 angewandt werden. Insbesondere existieren also die Funktionen

$$\hat{p}(\nu; T) = p, \quad \hat{s}(\nu; T) = s(u, V), \quad (44), (45)$$

$$\hat{f}(\nu; T) = f(T, V), \quad \hat{j}(\nu; T) = j(T, V). \quad (46), (47)$$

$$\text{Entsprechend } \varrho(\nu, T) = \hat{u}_\nu(\nu; T) \quad (48)$$

sind nun die übrigen thermodynamischen Spektralfunktionen wie folgt zu definieren<sup>15</sup>:

$$\pi(\nu, T) \equiv \hat{p}_\nu(\nu; T), \quad (49)$$

$$\sigma(\nu, T) \equiv \hat{s}_\nu(\nu; T) = \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^T s_u + \left( \frac{\partial V}{\partial \nu} \right)^T s_V, \quad (50)$$

$$\varphi(\nu, T) \equiv \hat{f}_\nu(\nu; T) = \left( \frac{\partial V}{\partial \nu} \right)^T f_V, \quad (51)$$

$$\iota(\nu, T) \equiv \hat{j}_\nu(\nu; T) = \left( \frac{\partial V}{\partial \nu} \right)^T j_V. \quad (52)$$

Da das betrachtete System nur zwei thermodynamische Freiheitsgrade hat, müssen zwischen den fünf Größen (48) bis (52) drei unabhängige thermodynamische Identitäten bestehen. Zwei Identitäten folgen aus den Definitionsgleichungen (17), (18), nämlich

$$\boxed{\varphi = \varrho - T \sigma} \quad [\text{I}_1], \quad \boxed{\iota = -\varphi/T} \quad [\text{I}_2]. \quad (53), (54)$$

Die dritte Identität ergibt sich aus dem Ersten und Zweiten Hauptsatz. Die durch die Hauptsätze implizierten Relationen erhält man am bequemsten, wenn man die unter 3 a) oder 3 b) stehenden Formeln von Abschnitt 5 bei konstantem  $T$  nach  $\nu$  differenziert, nachdem man zuvor entsprechend (44) bis (47) substituiert hat. Da in diesen Formeln auch Ableitungen nach  $V$  vorkommen, ist dabei Folgendes zu beachten.

Da das betrachtete System zwei thermodynamische Freiheitsgrade hat, gelten Gleichungen von der Form

$$d\nu = \nu_\alpha d\alpha + \nu_\beta d\beta, \quad (55)$$

wo  $\alpha, \beta$  irgendzwei unabhängige thermodynamische Variablen sind, mit der Integrabilitätsbedingung

$$\nu_{\alpha\beta} = \nu_{\beta\alpha}. \quad (56)$$

Werden als unabhängige Variable  $T$  und  $V$  gewählt – wie für die Potentiale  $f$  und  $j$  –, so schreiben wir (55) in der Form

$$d\nu = -\frac{1}{g} \nu \frac{dV}{V} + \frac{2}{g} \nu \frac{dT}{T}. \quad (57)$$

<sup>15</sup> Der obere Index  $T$  bedeutet, daß die Differentiation bei konstantem  $T$  erfolgt.

Die zugehörige Integrabilitätsbedingung lautet

$$T^1 g_T + V^2 g_V = 0 \quad (\text{IB}). \quad (58)$$

Die Formeln (23.2) bis (23.6) bzw. (24.2) bis (24.6) ergeben dann folgendes:

$$\text{a) } \pi = -\varphi \left[ 1 - \frac{1}{g} - \nu \frac{1}{g_V} \right] + \frac{1}{g} \nu \varphi_\nu, \quad (59)$$

$$\varrho = \varphi - T \varphi_T, \quad (60)$$

$$\boxed{\sigma = -\varphi_T}, \quad [\text{I}_3] \quad (61)$$

$$\iota = -\varphi/T, \quad (62)$$

$$\pi_T - \sigma \left[ 1 - \frac{1}{g} - \nu \frac{1}{g_V} \right] + \frac{1}{g} \nu \sigma_\nu = 0; \quad (\text{IB}) \quad (63)$$

$$\text{b) } \pi = T \iota \left[ 1 - \frac{1}{g} - \nu \frac{1}{g_V} \right] - T \frac{1}{g} \nu \iota_\nu, \quad (64)$$

$$\varrho = T^2 \iota_T, \quad (65)$$

$$\sigma = \iota + T \iota_T, \quad (66)$$

$$\varphi = -T \iota, \quad (67)$$

$$T \pi_T - \pi - \varrho \left[ 1 - \frac{1}{g} - \nu \frac{1}{g_V} \right] + \frac{1}{g} \nu \varrho_\nu = 0. \quad (\text{IB}) \quad (68)$$

Sieht man von den Gleichungen ab, die  $\frac{1}{g}$  enthalten und daher keine thermodynamischen Identitäten darstellen, so erhält man also in der Tat genau eine neue unabhängige Identität, z. B. (61).

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man statt von  $\varrho(\nu, T)$  von irgendeiner anderen thermodynamischen Spektralfunktion ausgeht.

Damit ist bewiesen:

*Hauptsatz der Spektraltheorie: Besitzt ein System mit einem thermodynamischen Freiheitsgrad eine thermodynamische Spektralfunktion, so existieren sämtliche übrigen thermodynamischen Spektralfunktionen; von diesen Spektralfunktionen sind genau zwei thermodynamisch unabhängig, nämlich  $\pi(\nu, T)$  und irgendeine andere.*

Ein weiteres bemerkenswertes Ergebnis ist, daß nur die Spektralfunktionen  $\varphi$  und  $\iota$  wieder Potentiale für die übrigen Spektralfunktionen (mit Ausnahme von  $\pi$ ) sind (und für  $\pi$ , falls man  $\frac{1}{g}$  kennt); die übrigen Spektralfunktionen sind jedoch keine Potentiale. Dies hat zur Folge, daß bei der Berechnung der übrigen Spektralfunktionen als Funktionen von  $\nu$  noch eine willkürliche Funktion von  $\nu$  als Integrationskonstante auftritt. So wird z. B.

$$\sigma(\nu, T) = \varrho/T + \int_T^T (\varrho/T'^2) dT' - \sigma_0(\nu), \quad (69)$$

$$\iota(\nu, T) = \int_T^T (\varrho/T'^2) dT' - \sigma_0(\nu), \quad (70)$$

$$\pi(\nu, T) = \left( 1 - \frac{1}{g} - \nu \frac{1}{g_V} \right) T \left[ \int_T^T (\varrho/T'^2) dT' - \sigma_0(\nu) \right] - \nu \frac{1}{g} T \left[ \int_T^T (\varrho_\nu/T'^2) dT' - \sigma_{0\nu}(\nu) \right]. \quad (71)$$

Vergleicht man nun diese Spektralfunktionen mit den Integranden von  $\overset{\circ}{s}(T)$ ,  $\overset{\circ}{j}(T)$ ,  $\overset{\circ}{p}(T)$  in (40) bis (42), so sieht man, daß die beiden ersten Integranden mit  $\sigma(\nu, T)$  bzw.  $\iota(\nu, T)$  übereinstimmen, falls man die Entropiekonstante  $\sigma_0(\nu) = 0$  setzt. Dagegen ist der Integrand von  $\overset{\circ}{p}(T)$  in (42) im allgemeinen von der thermodynamischen Spektralfunktion  $\pi(\nu, T)$  (71) auch für  $\sigma_0 = 0$  verschieden. *Die hier entwickelte Spektraltheorie führt also nicht nur zu eindeutigen, sondern auch zu anderen Resultaten als die mathematisch willkürliche Identifizierung der Integranden von (40) bis (42) mit den thermodynamischen Spektralfunktionen.*

Die obigen Formeln gelten allgemein, d. h. unabhängig von allen Annahmen über die Funktionen  $\overset{1}{g}$  und  $\overset{2}{g}$ . Da  $\overset{2}{g}$  in die Formeln für die Spektralfunktionen nicht eingeht, ist von vornherein klar, daß  $\overset{2}{g}$  für die allgemeine Theorie keine Bedeutung hat. Die Funktion  $\overset{2}{g}$  kann somit allenfalls von der Art und Weise abhängen, in der das betrachtete System realisiert wird<sup>16</sup>, nicht aber von den inhärenten Eigenschaften des Strahlungsfeldes bzw. seines mathematischen Modells. Wenn man also irrelevante Eigenschaften des Strahlungshohlraumes (Beschaffenheit der Wände) aus der Theorie eliminieren will, muß man verlangen, daß  $\overset{1}{g}$  von  $\overset{2}{g}$  unabhängig wird. Hinreichend hierfür ist, daß man  $\overset{2}{g} \equiv 0$  setzt. Wir zeigen dann, daß dies auch notwendig ist.

Wir gehen davon aus, daß als Argumente der dimensionslosen Funktionen  $\overset{i}{g}$  nur die dimensionslosen Variablen

$$y = \nu/\nu_0, \quad \Theta = kT/(h\nu_0), \quad \beta = V/l^3$$

auftreten können; dabei ist gemäß (57)  $y$  als Funktion der beiden anderen Variablen aufzufassen. Die Integrabilitätsbedingung (58) lautet dann

$$\Theta \overset{1}{g}_\Theta + \beta \overset{2}{g}_\beta + \overset{2}{g} y \overset{1}{g}_y - \overset{1}{g} y \overset{2}{g}_y = 0. \quad (58')$$

<sup>16</sup> Die einzige Bedingung, die die Wände des Strahlungshohlraumes erfüllen müssen, damit das betrachtete System realisierbar wird, ist die, daß sie keinen Mechanismus enthalten, durch den ein Energieaustausch zwischen den Frequenzbereichen  $(0, \nu]$  und  $(\nu, \infty)$  vermittelt wird. Diese Bedingung ist auf verschiedene Weisen erfüllbar, z. B. durch folgende Festsetzungen:

Damit  $\overset{2}{g}$  von  $\overset{1}{g}$  unabhängig wird, muß man also in der Tat

$$\overset{2}{g} \equiv 0 \quad (72)$$

setzen. Damit aber wird

$$\overset{1}{g}_\Theta \equiv 0. \quad (73)$$

Ferner ist zu verlangen, daß der integrale Strahlungsdruck  $\overset{\circ}{p}(T)$  nicht vom Volumen abhängig wird. Diese Bedingung ist wegen (71) dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\overset{1}{g}_\beta \equiv 0. \quad (74)$$

(73) und (74) besagen, daß  $\overset{1}{g}$  nur noch eine Funktion von  $y$  sein kann:

$$\overset{1}{g} = \overset{1}{g}(y).$$

Wir zeigen nun, daß diese Funktion mit der durch (6) definierten Modellfunktion  $g$  identisch ist. Definitionsgemäß bezieht sich letztere auf eine adiabatische Volumänderung ( $\delta Q = 0$ ), während sich  $\overset{1}{g}$  im allgemeinen, d. h. für  $\overset{2}{g} \neq 0$ , auf eine beliebige Zustandsänderung bezieht. Ist jedoch  $\overset{2}{g} \equiv 0$ , so hängt nach (57) die Änderung von  $\nu$  nur noch von der Volumänderung ab. Dies entspricht einem Hohlraum mit spiegelnden Wänden. Dann ist aber jede Zustandsänderung adiabatisch. Wir haben also

$$\boxed{\overset{1}{g} = g(y)}. \quad (75)$$

## 8. Thermodynamische Grundgleichung für $q$ und Konsistenzbedingungen

Um eine thermodynamische Aussage bezüglich  $q$  zu erhalten, muß man jedenfalls den Ersten und Zweiten Hauptsatz benutzen. Die Logik lehrt, daß der Gehalt (= Menge aller Folgerungen) einer Konjunktion von zwei Sätzen im allgemeinen größer ist als die Summe der Gehalte der beiden einzelnen Sätze. Um die thermodynamische Maximalaussage über  $q$  zu erhalten, empfiehlt es sich daher, nicht

	Beschaffenheit der Wände		Wandtemperatur $T_w$
	im Intervall $(0, \nu]$	im Intervall $(\nu, \infty)$	
(a)	absorbierend	reflektierend	$T_w = T$
(b)	reflektierend	absorbierend	$T_w = 0$
(c)	reflektierend	reflektierend	$T_w$ beliebig

den Ersten und Zweiten Hauptsatz nacheinander anzuwenden<sup>17</sup>, sondern eine Gleichung zu benutzen, die beide Hauptsätze enthält. Diese Bedingung wird von jeder der in Abschnitt 5 angegebenen Integrabilitätsbedingungen für die thermodynamischen Potentiale erfüllt. Am bequemsten für unsere Zwecke erweist sich die Benutzung der Integrabilitätsbedingung (24.6) in der spektralen Form (68), die  $\varrho(\nu, T)$  mit  $\pi(\nu, T)$  und  $g$  verknüpft. Führt man in (68) statt  $\pi(\nu, T)$  die durch

$$\pi(\nu, T) = G(x, y) \varrho(\nu, T) \quad (5)$$

definierte dimensionslose Funktion  $G$  ein, so ergibt sich

$$\boxed{\varrho[1 + G - g - y g_y + x G_x] - g \nu \varrho_\nu - G T \varrho_T = 0.} \quad (76)$$

Dies ist eine „strenge-lineare“ partielle Differentialgleichung für  $\varrho$ , die die beiden dimensionslosen Modellfunktionen  $g$  und  $G$  als Parameter enthält; wir nennen sie die *thermodynamische Grundgleichung* für  $\varrho$ .

In der alten Elektrodynamik (MAXWELLSche Theorie, Photonentheorie, quantisierte MAXWELLSche Theorie) gilt

$$g = G = 1/3,$$

so daß sich (76) auf

$$3 \varrho - \nu \varrho_\nu - T \varrho_T = 0,$$

d. h. auf das WIENSche Verschiebungsgesetz reduziert. Demgemäß stellt (76) den allgemeingültigen (rein thermodynamischen) Beitrag zum WIENSchen Verschiebungsgesetz dar, während  $g = G = 1/3$  den Anteil der MAXWELLSchen Theorie bzw. der Photonentheorie an diesem Gesetz darstellt.

Führt man statt  $\nu$  und  $T$  als unabhängige Variable  $x$  und  $y$  ein, so geht (76) über in<sup>18</sup>

$$\varrho[1 + G - g - y g_y + x G_x] - g y \varrho_y + [G - g] x \varrho_x = 0. \quad (77)$$

Schreibt man  $\varrho$  in der Form

$$\varrho = A \frac{\nu^3 h}{c^3} F(x, y), \quad (4)$$

so ergibt sich für die dimensionslose Funktion  $F$  die Differentialgleichung

$$F[1 + G - 4g - y g_y + x G_x] - g y F_y + (G - g) x F_x = 0. \quad (78)$$

Diese Gleichung enthält die Antwort auf unsere eingangs gestellte Frage: sie gibt den rein thermodynamisch bedingten Zusammenhang zwischen  $F(x, y)$  und den beiden Modellfunktionen  $G(x, y)$  und  $g(y)$ .

Die Grundgleichung (76) für  $\varrho$  bzw. (78) für  $F$  enthält noch nicht alles, was die Thermodynamik über den Zusammenhang der Funktionen  $\varrho$ ,  $G$ ,  $g$  bzw.  $F$ ,  $G$ ,  $g$  aussagen kann. Dies beruht darauf, daß sie durch Differentiation aus der Integrabilitätsbedingung (24.6) abgeleitet wurde. Wir müssen daher nachprüfen, ob sich bei der Integration über  $\nu$  die Beziehung

$$T \overset{\circ}{p}_T - \overset{\circ}{p} - \overset{\circ}{u} = 0 \quad (35)$$

ergibt. Man findet, daß dies nur dann der Fall ist, wenn

$$[y g \varrho]_{y_{\min}}^{y_{\max}} = 0 \quad (79)$$

ist. Gehen wir andererseits in der Ausgangsgleichung

$$T p_T - p - u = V u_V = -g \nu \varrho_\nu \quad (24.6)$$

zum limes ( $\nu \rightarrow \nu_{\max}$ ), so erhalten wir

$$T \overset{\circ}{p}_T - \overset{\circ}{p} - \overset{\circ}{u} = - \lim_{y=y_{\max}} [y g \varrho].$$

Folglich müssen die beiden limes einzeln verschwinden:

$$\boxed{\lim_{y=y_{\max}} [y g \varrho] = 0, \quad \lim_{y=y_{\min}} [y g \varrho] = 0.} \quad (79a), (79b)$$

Diese limes-Bedingungen bezeichnen wir auch als *thermodynamische Konsistenzbedingungen*. Da gemäß (76)  $\varrho$  als Funktional von  $G$  und  $g$  aufzufassen ist, sind die limes-Bedingungen (79) als Bedingungen für die Modellfunktionen  $G$  und  $g$  zu betrachten; sie sichern die thermodynamische Konsistenz des jeweiligen Modells.

<sup>17</sup> Ein solches Verfahren wird bei den elementaren Beweisen des WIENSchen Verschiebungsgesetzes benutzt. Diese Beweise sind jedoch auch auf der Grundlage der MAXWELLSchen Theorie nicht schlüssig, da in ihnen die Invarianz von  $\varrho/\nu^3$  und  $\nu/T$  nur gegenüber adiabatischen Zustandsänderungen, nicht aber — wie es nötig wäre — gegenüber der vollen Gruppe der reversiblen Zustandsänderungen bewiesen wird. Außerdem enthalten die elementaren Beweise noch andere Fehler — vgl. Anm. <sup>14</sup> —. Auf die vermutliche

Fehlerhaftigkeit der elementaren Beweise des WIENSchen Verschiebungsgesetzes wurde der Verfasser seinerzeit von R. EISENSCHITZ aufmerksam gemacht.

<sup>18</sup> Wir benutzen die „physikalische Schreibweise“, d. h. wir schreiben für die durch

$$\check{\varrho}(\nu, T) = \check{\varrho}(x, y)$$

definierte Funktion  $\check{\varrho}$  wieder  $\varrho$ .

Die Gln. (76), (79 a), (79 b) enthalten alles, was sich mit rein thermodynamischen Mitteln über  $Q(\nu, T)$  bzw. die Modellfunktionen  $G$ ,  $g$  aussagen läßt.

### III. Statistische Thermodynamik

#### 9.

Vom Standpunkt der Statistischen Thermodynamik bedeutet die Existenz der Spektralfunktion  $Q(\nu, T)$  die Existenz einer mittleren Energie pro Freiheitsgrad

$$U^{(\nu)}(\nu, T)$$

gemäß der Aufspaltung

$$Q(\nu, T) = n_\nu(\nu) U^{(\nu)}(\nu, T). \quad (7)$$

Dabei ist  $n_\nu(\nu)$  die Anzahl der Freiheitsgrade pro Volumen- und Frequenzeinheit.

Die Existenz der Funktion  $U^{(\nu)}(\nu, T)$  bedeutet weiter, daß man die Statistische Thermodynamik auf das System anwenden kann, das die mittlere Energie  $U^{(\nu)}$  besitzt. Dieses System bezeichnen wir in Anlehnung an den Sprachgebrauch als *Strahlungsozillator* (der Frequenz  $\nu$ ). Für dieses System gelten also die Formeln

$$Q^{(\nu)} = \sum_n \exp\{-\varepsilon_n(\nu)/(kT)\}, \quad (\text{Zustandssumme}) \quad (80)$$

$$F^{(\nu)} = -kT \ln Q^{(\nu)}, \quad (81)$$

$$U^{(\nu)} = F^{(\nu)} - T F_T^{(\nu)} = \frac{\sum \varepsilon_n(\nu) \exp\{-\varepsilon_n(\nu)/(kT)\}}{Q^{(\nu)}} \equiv \overline{\varepsilon_n(\nu)}, \quad (82)$$

$$p^{(\nu)} = -\frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial V} = g \frac{\nu}{V} F_\nu^{(\nu)} = \frac{\nu g}{V} \frac{\sum \varepsilon_{n\nu} \exp\{-\varepsilon_{n\nu}/(kT)\}}{Q^{(\nu)}} \equiv g V^{-1} \nu \overline{\varepsilon_{n\nu}}, \quad (83)$$

$$S^{(\nu)} = -\frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial T} = k \ln Q^{(\nu)} + \frac{1}{T} \frac{\sum \varepsilon_n \exp\{-\varepsilon_n/(kT)\}}{Q^{(\nu)}}, \quad (84)$$

$$J^{(\nu)} = -\frac{F^{(\nu)}}{T} = k \ln Q^{(\nu)}. \quad (85)$$

Diese Funktionen nennen wir *Oszillatorfunktionen*. Der obere Index  $(\nu)$  dient hier zur Unterscheidung dieser Funktionen von den bereits eingeführten Funktionen.

Man kann nun die spektralen Dichtefunktionen  $Q(\nu, T)$ ,  $\pi(\nu, T)$  etc. auf zwei Weisen berechnen, einmal direkt durch Multiplikation der entsprechenden Oszillatorfunktionen mit  $n_\nu(\nu)$ , zum anderen über das Dichtepotential der freien Energie,

$$\varphi = n_\nu F^{(\nu)}, \quad (86)$$

nach den Formeln (53) bis (67). Das Resultat ist in allen Fällen das gleiche — mit Ausnahme der Funktion  $\pi(\nu, T)$ . Hier ergibt der erste Weg

$$\pi(\nu, T) = V n_\nu p^{(\nu)} = \nu n_\nu g F_\nu^{(\nu)}, \quad (87)$$

während der zweite Weg gemäß (53)

$$\pi(\nu, T) = -\varphi[1 - g - \nu g_\nu] + g \nu \varphi_\nu = \nu n_\nu g F_\nu^{(\nu)} - n_\nu F^{(\nu)} + F^{(\nu)}[\nu n_\nu g]_\nu \quad (88)$$

ergibt. Die Konsistenz verlangt also, daß

$$[\nu n_\nu g]_\nu - n_\nu \equiv 0 \quad (89)$$

ist. Benutzen wir für  $n_\nu(\nu)$  die Dimensionsformel

$$n_\nu(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \chi(\nu), \quad (90)$$

so ergibt (89) die Konsistenzbedingung

$$\boxed{3g - 1 + y g_y + g y \chi_y / \chi = 0}, \quad (90)$$

also  $\chi = \chi[g](y)$

$$= a(y^3 g)^{-1} \exp\left\{\int^y (y' g)^{-1} dy'\right\} \quad (91)$$

oder  $g = g[\chi](y)$

$$= y^{-3} \chi^{-1} \int^y y'^2 \chi dy'. \quad (92)$$

Diese Formeln, die wir später auf andere Weise wiederfinden werden, geben den Zusammenhang der „thermodynamischen“ Modellfunktion  $g(y)$  und der „statistischen“ Modellfunktion  $\chi(y)$ .

Weitere Konsistenzbedingungen ergeben sich daraus, daß man die integralen Funktionen  $\overset{\circ}{u}(T)$ ,  $\overset{\circ}{p}(T)$  etc. auf zwei verschiedene Weisen berechnen kann, nämlich einmal durch Integration der entsprechenden Spektralfunktion, und zum anderen auf dem Umwege über das integrale Dichtepotential

$$\overset{\circ}{f}(T) = \int_{(\nu)} n_\nu F^{(\nu)} d\nu \quad (93)$$

unter Benutzung der Formeln (30) bis (33).

Sieht man zunächst vom Druck ab, so ergibt sich hier als Konsistenzbedingung lediglich die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration:

$$\frac{d}{dT} \int_{(\nu)} n_\nu F^{(\nu)} d\nu = \int_{(\nu)} n_\nu F_T^{(\nu)} d\nu. \quad (94)$$

Gleichsetzung der beiden für  $\overset{\circ}{p}(T)$  erhaltenen Ausdrücke ergibt dagegen

$$[\nu g \varrho]_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} = 0. \quad (95)$$

Diese Bedingung entspricht der früheren Bedingung

$$[\nu g \varrho]_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} = 0, \quad (97)$$

mit der sie wegen  $\varrho = \varphi - T \varphi_T$  praktisch gleichbedeutend ist.

Es bleibt nun noch der Zusammenhang zwischen der zweiten thermodynamischen Modellfunktion  $G$  und der durch die Dimensionsformel

$$\varepsilon_n(\nu) = h \nu \Gamma_n(y) \quad (10)$$

definierten Funktionenschar  $\Gamma_n$  zu klären.

Zunächst stellen wir fest, daß die zu den Oszillatorfunktionen  $p^{(\nu)}$  und  $U^{(\nu)}/V$  gehörige Funktion

$$G^{(\nu)} \equiv V p^{(\nu)}/U^{(\nu)} \quad (96)$$

mit  $G \equiv \pi/\varrho$  identisch ist:

$$G \equiv \frac{\pi}{\varrho} = \frac{V n_\nu p^{(\nu)}}{n_\nu U^{(\nu)}} \equiv G^{(\nu)}. \quad (97)$$

Mit (82), (83) wird unter Benutzung von (10)

$$G = G^{(\nu)} = g + g \frac{\sum y \Gamma_{ny} \exp\{-\varepsilon_n/(kT)\}}{\sum \Gamma_n \exp\{-\varepsilon_n/(kT)\}} \quad (98)$$

$$= g[1 + y \bar{\Gamma}_{ny}/\bar{\Gamma}_n], \quad (99)$$

wo die Mittelwerte in der üblichen Weise definiert sind. Vom Standpunkt der Statistischen Thermodynamik ist also  $G$  ein relativ komplizierter Ausdruck, der von statistischen Mittelwerten abhängt und daher im allgemeinen  $T$ -abhängig ist. Es genügt jedoch, daß das Energiespektrum des Strahlungsozillators von der Form

$$\varepsilon_n(\nu) = h \nu f(n) \Gamma(y) \quad (100)$$

ist, damit die  $T$ -Abhängigkeit verschwindet:

$$G = g \left[ 1 + \frac{y \Gamma_y}{\Gamma} \right] \text{ für } \varepsilon_n(\nu) = h \nu f(n) \Gamma(y). \quad (101)$$

In diesem Fall wird

$$\gamma^{-1} = 1 + y \Gamma_y/\Gamma, \text{ also } \Gamma = \exp \left\{ \int_{y'}^y \frac{1-\gamma}{y' \gamma} dy' \right\} \quad (102)$$

$$\text{mit } \gamma \equiv g/G. \quad (103)$$

## IV. Axiomatischer Aufbau

### 10. Postulate

Im folgenden untersuchen wir die Konsequenzen der folgenden Postulate:

P 0. Es existiert die thermodynamische Spektralfunktion  $\varrho(\nu, T)$  für die Energiedichte der schwarzen Strahlung.

P 1. Es gelten der Erste und Zweite Hauptsatz der Thermodynamik.

P 2. Bei einer quasistatischen (adiabatisch-reversiblen) Expansion des Strahlungshohlraums bleibt die Anzahl der angeregten Freiheitsgrade konstant (*Schwacher Adiabatenansatz*).

P 3. Die Modellfunktion  $G$  ist temperaturunabhängig:  $G_x = 0$ .

P 4. Für  $y \rightarrow y_c$  gehen alle Funktionen von  $y$  asymptotisch in die entsprechenden Funktionen der alten Theorie über. Dabei ist  $y_c$  ( $= 0$  oder  $= \infty$ ) der korrespondenzmäßige Grenzwert von  $y$  (*Korrespondenzprinzip*).

Von diesen Postulaten bedarf nur P 3 einer Erläuterung; es ist äquivalent der Forderung, daß für die durch die Dimensionsformel

$$\varepsilon_n(y) = h \nu \Gamma_n(y)$$

definierten Funktionen  $\Gamma_n(y)$  die Zerlegung

$$\Gamma_n(y) = f(n) \Gamma(y) \quad (104)$$

gilt. Diese Forderung, obwohl nicht selbstverständlich, ist durch den Umstand nahegelegt, daß  $n$  die Quantenzahl des Strahlungsozillators ist. Ferner ist zu bedenken, daß P 4 jedenfalls

$$\Gamma_n(y) \rightarrow n \text{ für } y \rightarrow y_c \quad (105)$$

verlangt. Falls (104) nicht gilt, so ist letzteres nur durch Funktionen  $\Gamma_n(y)$  zu erreichen, die vom physikalischen Standpunkt aus äußerst gekünstelt erscheinen. Zu dem gleichen Resultat gelangt man, wenn man die Funktion  $G$  selbst betrachtet. Läßt man nämlich P 3 fallen, so verlangt P 4, daß

$$\lim_{y \rightarrow y_c} G(x, y) = \frac{1}{3} \text{ für alle } x.$$

Auch das Auftreten einer solchen Funktion ist von vornherein unwahrscheinlich. Ein weiteres Argument zugunsten von P 3 wird in Abschnitt 12 gebracht. Wir werden daher nur im Anhang auf die Frage eingehen, was sich bei Fortlassen von P 3 ergibt.

### 11. Folgerungen

Die Folgerungen aus P 0 und P 1 sind bereits in Teil II und III dargestellt.

P 2 ergibt folgendes. Es sei

$$N = V n(\nu)$$

die Anzahl der Freiheitsgrade des von uns betrachteten Systems mit der Energiedichte

$$\hat{u}(\nu, T) = \int_{\nu_{\min}}^{\nu} \varrho(\nu', T) d\nu'.$$

Dann besagt P 2, daß

$$\begin{aligned} \delta N &\equiv N_V \delta V + N_\nu \delta \nu \\ &\equiv n(\nu) \delta V + V n_\nu(\nu) \delta \nu = 0 \\ \text{also } g(y) &\equiv -\frac{\delta \nu}{\nu} \frac{\delta V}{V} = \frac{n}{\nu n_\nu}. \end{aligned} \quad [\text{P 2}] \quad (106)$$

Benutzt man noch für  $n_\nu$  die Dimensionsformel

$$n_\nu(\nu) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \chi(y), \quad (8)$$

so ergibt sich

$$\boxed{y \chi_y / \chi = (1 - 3g - y g_y) / g} \quad [\text{P 2}]. \quad (90)$$

Den gleichen Zusammenhang zwischen  $g$  und  $\chi$  erhielten wir bereits in Teil III als Konsistenzbedingung. Wenn man will, kann man hierin einen Beweis von P 2 auf Grund der Statistischen Thermodynamik erblicken. Jedenfalls rechtfertigt P 2 das in Teil III eingeschlagene Verfahren.

Der Zusammenhang (90) zwischen  $g$  und  $\chi$  erlaubt es, die Grundgleichung (76) für  $\varrho$  durch eine einfachere Differential-Gleichung zu ersetzen. Schreibt man nämlich  $\varrho$  in der Form

$$\varrho(\nu, T) = n_\nu h \nu \Phi(x, y), \quad (107)$$

so ergibt sich für  $\Phi$  aus der Grundgleichung (76) zunächst

$$\begin{aligned} \Phi[1 + G - 4g - y g_y - g y \chi_y / \chi + x G_x] \\ - g y \Phi_y + (G - g) x \Phi_x = 0. \end{aligned} \quad (108)$$

Wegen (90) reduziert sich dies auf

$$\Phi[G - g + x G_x] - g y \Phi_y + (G - g) x \Phi_x = 0 \quad [\text{P 0} - \text{P 2}]. \quad (109)$$

Die Vereinfachung gegenüber der Diff.-Gl. (76) oder (78) besteht darin, daß jetzt die Ableitung von  $g$  nicht mehr auftritt. — Damit sind die Konsequenzen von P 2 erschöpft.

Benutzt man noch P 3, so reduziert sich die Differential-Gleichung für  $\Phi$  auf

$$(1 - \gamma) \Phi - \gamma y \Phi_y + (1 - \gamma) x \Phi_x = 0 \quad [\text{P 0} - \text{P 3}] \quad (110)$$

$$\text{mit } \gamma \equiv \gamma(y) \equiv g(y)/G(y). \quad (103)$$

Das allgemeine Integral dieser Differential-Gleichung lautet

$$\Phi(x, y) = \Gamma(y) H(x \Gamma(y)), \quad (111)$$

wo  $H$  eine willkürliche Funktion und

$$\Gamma \equiv \Gamma[\gamma](y) = \exp \left\{ \int_{y_0}^y \frac{1-\gamma}{y' \gamma} dy' \right\} \quad (102)$$

ist. Somit wird

$$\varrho(\nu, T) = \left( \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \right) \chi(y) h \nu \Gamma H(x \Gamma) \quad [\text{P 0} - \text{P 3}]. \quad (112)$$

Benutzen wir andererseits die Formeln der Statistischen Thermodynamik, so ergibt P 3

$$\begin{aligned} \varrho(\nu, T) &= \left( \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \right) \chi(y) \\ &\cdot h \nu \Gamma \frac{\sum_n f(n) \exp\{-x \Gamma f(n)\}}{\sum_n \exp\{-x \Gamma f(n)\}} \quad [\text{P 0} - \text{P 3}]. \end{aligned} \quad (113)$$

Es ist also

$$H(x \Gamma) = \frac{\sum_n f(n) \exp\{-x \Gamma f(n)\}}{\sum_n \exp\{-x \Gamma f(n)\}} \equiv \bar{f}(n). \quad (114)$$

Damit ist auch P 3 ausgeschöpft.

Schließlich ist das Korrespondenzprinzip P 4 auszuwerten. Die korrespondenzmäßigen Grenzwerte für  $y \rightarrow y_c$  kennzeichnen wir durch den unteren Index „c“. P 4 verlangt zunächst

$$g_c \equiv \lim_{y \rightarrow y_c} g(y) = \frac{1}{3}, \quad G_c \equiv \lim_{y \rightarrow y_c} G(y) = \frac{1}{3}, \quad (115), (116)$$

$$\gamma_c \equiv \lim_{y \rightarrow y_c} \gamma(y) = 1, \quad \Gamma_c \equiv \lim_{y \rightarrow y_c} \Gamma(y) = 1, \quad (117), (118)$$

$$\chi_c \equiv \lim_{y \rightarrow y_c} \chi(y) = 1. \quad (119)$$

Diese Formeln kann man benutzen, um die Integrationskonstanten in den Ausdrücken (91), (92), (102) für  $\chi$ ,  $g$  und  $\Gamma$  zu bestimmen. Das Resultat lautet

$$\chi(y) = \lim_{y_0 \rightarrow y_c} \left( \frac{3 y^3 g}{y_0^3} \right)^{-1} \exp \left\{ \int_{y_0}^y \frac{dy'}{y' g(y')} \right\}, \quad [\text{P 2}, \text{P 4}] \quad (120)$$

$$g(y) = y^{-3} \chi^{-1} \int_{y_{\min}}^y y'^2 \chi(y') dy', \quad [\text{P 2}, \text{P 4}] \quad (121)$$

$$\Gamma(y) = \exp \int_{y_c}^y \frac{1-\gamma}{y' \gamma} dy'. \quad [\text{P 2}, \text{P 4}] \quad (122)$$

Die wichtigste Funktion des Korrespondenzprinzips besteht jedoch darin, daß es die zunächst willkürliche Integrationsfunktion  $H$  in (112) bestimmt. Da nämlich für  $y \rightarrow y_c$  sich das PLANCKSche Gesetz ergeben soll, muß  $H$  die PLANCKSche Funktion

$$H(z) = (e^z - 1)^{-1} \quad (123)$$

sein. Formel (114) zeigt dann, daß

$$f(n) = n, \quad \text{also} \quad \varepsilon_n(\nu) = n h \nu I(\nu) \quad (124)$$

ist.

Wir erhalten also schließlich

$$\varrho(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \chi(y) \frac{h \nu I(y)}{\exp\{x I(y)\} - 1}. \quad [\text{P 0} - \text{P 4}] \quad (125)$$

Die hier auftretenden Funktionen  $\chi$  und  $I$  unterliegen nur den korrespondenzmäßigen Beschränkungen (118), (119) sowie den thermodynamischen Konsistenzbedingungen (79 a), (79 b). Letztere lassen sich mit (120), (125) in folgender Form schreiben

$$\lim_{y \rightarrow y_{\max}} \left[ \frac{y I(y)}{\exp\{x_0 y I(y)\} - 1} \lim_{y_0 \rightarrow y_c} y_0^3 \exp \int_{y_0}^y \frac{dy'}{y' g(y')} \right] = 0 \quad (126 \text{ a})$$

$$\lim_{y \rightarrow y_{\min}} \left[ \frac{y I(y)}{\exp\{x_0 y I(y)\} - 1} \lim_{y_0 \rightarrow y_c} y_0^3 \exp \int_{y_0}^y \frac{dy'}{y' g(y')} \right] = 0. \quad (126 \text{ b})$$

Dabei ist die Abkürzung  $x_0 = h \nu_0 / (k T)$  benutzt. In dieser Form enthalten die thermodynamischen Konsistenzbedingungen nur noch die Modellfunktionen  $g$  und  $G$ . Eliminiert man andererseits  $g$  mit Hilfe von (121), so lauten die Konsistenzbedingungen:

$$\lim_{y \rightarrow y_{\min}} \frac{y I(y)}{\exp\{x_0 y I(y)\} - 1} \int_{y_{\min}}^y y'^2 \chi(y') dy' = 0, \quad [\text{P 0} - \text{P 4}] \quad (127 \text{ a})$$

$$\lim_{y \rightarrow y_{\max}} \frac{y I(y)}{\exp\{x_0 y I(y)\} - 1} \int_{y_{\min}}^y y'^2 \chi(y') dy' = 0. \quad [\text{P 0} - \text{P 4}] \quad (127 \text{ b})$$

## 12. Ungültigkeit des Wienschen Verschiebungsgesetzes in *h-c-I*-Theorien

Zum Schluß zeigen wir noch, daß die beiden Bedingungen

$$g = G = \frac{1}{3}$$

nicht nur hinreichend, sondern unter den Bedingungen P 1 – P 4 auch notwendig für die Gültigkeit des WIENSchen Verschiebungsgesetzes sind.

Zunächst stellt man fest, daß sich die Grundgleichung (76) für  $\varrho$  genau dann auf das WIENSche Verschiebungsgesetz

$$3 \varrho - \nu \varrho_\nu - T \varrho_T = 0 \quad (128)$$

reduziert, wenn

$$g = G = \frac{1}{3} + b y^{-3}, \quad (129)$$

wo  $b$  eine beliebige Konstante ist. Es ist also zu zeigen, daß als Folge unserer Postulate  $b = 0$  ist.

Zuvor sei bemerkt, daß (129) nicht nur  $\gamma \equiv 1$ , sondern auch  $\chi \equiv 1$  und somit das PLANCKsche Gesetz ergibt; die spektrale Druckfunktion würde jedoch bei  $b \neq 0$  nicht mehr mit der der alten Theorie übereinstimmen. Dies bestätigt das Resultat von

Teil II, wonach  $\varrho(\nu, T)$  und  $\pi(\nu, T)$  thermodynamisch unabhängig voneinander sind.

Falls  $y_c = 0$  ist, verlangt schon das Korrespondenzprinzip P 4 allein, daß  $b = 0$ . Ist jedoch  $y_c = \infty$ , so ist (129) mit  $b \neq 0$  sogar mit jedem einzelnen unserer Postulate P 0 – P 4 verträglich, wie man sich leicht überzeugt.

Daß dennoch (129) mit  $b \neq 0$  auch für  $y_c = \infty$  mit der Gesamtheit der Postulate P 1 – P 4 unverträglich ist, ergibt sich folgendermaßen. Einerseits führt (129) mit P 1 – P 4 zum PLANCKschen Gesetz. Andererseits wird eben deshalb

$$\lim_{y \rightarrow 0} [y g \varrho] = b A T.$$

Die thermodynamische Konsistenzbedingung (79 a) ist also nur erfüllt, wenn

$$b = 0 \quad (130)$$

ist.

Da das einzige unsichere Postulat P 3 ohnehin aus (129) folgt, ist damit zugleich bewiesen: *Es gibt keine korrespondenzmäßige Verallgemeinerung der alten Theorie, die das WIENSche Verschiebungsgesetz erfüllt.*

### 13. Allgemeine Diskussion des verallgemeinerten Strahlungsgesetzes

Trotz der Unbestimmtheit der beiden Funktionen  $\chi$  und  $I$  läßt das verallgemeinerte Strahlungsgesetz (125) einige allgemeine Bemerkungen und Folgerungen zu.

1. Die Verallgemeinerung des ersten (kinematischen) Faktors  $n_\nu$  (Anzahl der Freiheitsgrade pro Volum- und Frequenzeinheit) durch den Faktor  $\chi(y)$  ist trivial. Die Theorie (P 2) liefert hier lediglich den Zusammenhang von  $\chi$  mit der thermodynamischen Modellfunktion  $g$  [Formel (90)]. Solange man die Funktion  $g$  nicht kennt, nützt die Kenntnis dieses Zusammenhangs wenig.

2. Die Verallgemeinerung des zweiten (dynamisch-statistischen) Faktors  $U^{(\nu)}(\nu, T)$  [mittlere Energie pro Freiheitsgrad] ist sehr spezieller Natur und daher nichts weniger als trivial. Sie läuft auf die Ersetzung von  $\nu$  durch  $\nu I$  heraus. Da der Ausdruck

$$U^{(\nu)}(\nu, T) = \frac{h \nu I}{\exp\{h \nu I / (k T)\} - 1}$$

der kanonische Energiemittelwert für einen Energieträger mit dem Energiespektrum

$$\varepsilon_n(\nu) = n h \nu I$$

ist, läßt sich diese Verallgemeinerung auch dahingehend deuten, daß die Energieniveaus eines jeden Strahlungsozillators von der Frequenz  $\nu$  im Vergleich zur alten Theorie alle um den gleichen Betrag

$$\Delta\varepsilon = h \nu [I - 1] \quad (131)$$

verschoben sind. Dieses sehr spezielle Ergebnis beruht auf den Postulaten P 3 und P 4. Da P 4 (Korrespondenzprinzip) schon aus experimentellen Gründen nicht aufgegeben werden darf, kann nur P 3 in Zweifel gezogen werden.

3. P 3 fordert die Temperaturunabhängigkeit des Druckkoeffizienten  $G$ . Diese Bedingung ist jedenfalls erfüllt, wenn zwischen den zu verschiedener Frequenz gehörenden „Photonen“ der betreffenden  $h\cdot c\cdot l$ -Theo-

rie keine Wechselwirkung<sup>19</sup> besteht. (Deutet man  $I$  als Resultat einer Wechselwirkung zwischen „Photonen“ der gleichen Frequenz, so könnte diese als „Resonanzwechselwirkung“ bezeichnet werden.)

Ferner ist darauf hinzuweisen, daß eine bestimmte Art von Wechselwirkung auch bei  $G_x \equiv 0$  automatisch erfaßt ist. Dies beruht einfach darauf, daß — bei endlichem Volumen des Strahlungshohlraumes — die verschiedenen Frequenzen  $\nu$  definitionsgemäß Eigenfrequenzen des gesamten Strahlungsfeldes sind; sie brauchen daher nicht mit den Eigenfrequenzen unabhängiger Oszillatoren identifiziert zu werden. Denkt man etwa an ein System gekoppelter Oszillatoren, so wird durch die Kopplung das Frequenzspektrum des Gesamtsystems geändert, die Eigenschwingungen des Gesamtsystems sind aber wieder unabhängig voneinander. Diese Wechselwirkung „erster Art“, die lediglich zu einer Abänderung des Frequenzspektrums, d. h. der Funktion  $n_\nu$ , führt, ist bereits durch den Faktor  $\chi(y)$  berücksichtigt.

Besteht zwischen den zu verschiedener Frequenz gehörigen Photonen eine Wechselwirkung „zweiter Art“, so wird man für die Druckfunktion  $\hat{p}(\nu, T)$  den Ansatz

$$\begin{aligned} \hat{p}(\nu, T) = & \int_0^\nu \hat{G}(y') \varrho(\nu', T) d\nu' \\ & + \int_0^\nu d\nu' \int_0^{\nu'} d\nu'' \hat{G}(y', y'') \varrho(\nu', T) \varrho(\nu'', T) \end{aligned} \quad (132)$$

machen. Der Druckkoeffizient  $G$  ist dann

$$G = \hat{G}(y) + \int_0^\nu \hat{G}(y, y') \varrho(\nu', T) d\nu', \quad (133)$$

hängt also in der Tat in einer von  $\hat{G}$  abhängigen Weise von  $T$  ab. Aus Dimensionsgründen muß jedoch

$$\hat{G}(y, y') = \frac{l^4}{h c} \hat{\bar{G}}(y, y') \quad [\hat{\bar{G}} \text{ dimensionslos}] \quad (133 a)$$

sein. Der hier auftretende Faktor  $l^4/h c$  ist so klein, daß eine eventuelle Temperaturabhängigkeit von  $G$  gegenüber der  $y$ -Abhängigkeit von  $G$  völlig vernach-

<sup>19</sup> Mit „Wechselwirkung“ meinen wir hier und im folgenden jede Abweichung vom gewohnten Verhalten der Photonen. Natürlich braucht es sich dabei nicht um eine Wechselwirkung im mechanischen Sinne zu handeln. Solange wir die  $h\cdot c\cdot l$ -Theorie und ihre begriffliche Struktur nicht kennen, können wir jedoch solche Abweichungen nur unter Benutzung der gewohnten Begriffe charakterisieren.

<sup>19a</sup> E. SCHRÖDINGER, Proc. R. I. A. **47**, 77 [1941/42].

\* Zusatz b. d. Korr.: Nach SCHRÖDINGER<sup>19a</sup> ergibt die BORN-INFELDSche Elektrodynamik bereits in erster Näherung eine Wechselwirkung zweiter Art zwischen den Hohlraumoszillatoren, welche die im Text angegebene Größenordnung hat. Das Fehlen frequenzabhängiger  $l$ -Effekte in der Endformel [l. c. Formel (7, 18)] dürfte damit zusammenhängen, daß sowohl die alte Oszillatorquantisierung wie der alte Ausdruck für die Anzahl der Freiheitsgrade ( $\chi \equiv 1$ ) übernommen werden.

lässigbar ist. Für  $l = 2 \cdot 10^{-14}$  wird  $l^4/hc \approx 10^{-39}$  ( $\text{erg/cm}^3$ ) $^{-1}$ . Rechnet man diese Energiedichte nach dem STEFANSchen Gesetz auf Temperatur um, so findet man  $T \approx 10^{13}$  °K. Erst bei einer solchen Temperatur würde also eine etwaige Temperaturabhängigkeit von  $G$  mit der  $y$ -Abhängigkeit von  $G$  zu konkurrieren beginnen\*.

Wir kommen somit zu dem Resultat: Wechselwirkungen erster Art sind bereits durch die Funktion  $\chi$  berücksichtigt; eventuelle Wechselwirkungen zweiter Art, die zu  $G_x \neq 0$  führen, sind von solch verschwindend kleiner Größenordnung, daß sie gegenüber den übrigen  $l$ -Effekten vernachlässigt werden können. In diesem Sinn kann man sagen, daß das Postulat P 4 gerechtfertigt ist.

4. Die wichtigste Eigenschaft, die das verallgemeinerte Strahlungsgesetz mit dem PLANCKschen Gesetz gemeinsam hat, ist die, daß auch gemäß (125) die schwarze Strahlung als ein ideales BOSE-Gas aufgefaßt werden kann. Demgemäß muß in der  $h$ - $c$ - $l$ -Elektrodynamik sowohl der dualistische Charakter der Strahlung wie der gewohnte Zusammenhang von Spin und Statistik erhalten bleiben. Der dualistische Charakter der Strahlung drückt sich am klarsten im Schwankungsgesetz für die Energiedichte aus; es wird

$$\overline{U^{(\nu)2}} = k T^2 U_T^{(\nu)} = U^{(\nu)2} + \varepsilon(\nu) U^{(\nu)} \quad (134)$$

oder

$$\Delta Q \equiv \overline{Q^2} = Q^2 + n_\nu \varepsilon(\nu) Q = \Delta_{\text{WELLE}} Q + \Delta_{\text{KORP}} Q. \quad (134')$$

Dies ist formal das gleiche Gesetz wie im Fall der PLANCKschen Strahlung.

5. Eine weitere Bemerkung betrifft die asymptotischen Eigenschaften von (125). Offenbar gilt außer

$$Q(\nu, T) \xrightarrow{(y \rightarrow y_c)} Q_{\text{PLANCK}}(\nu, T)$$

auch

$$Q \xrightarrow{(\Theta \gg y\Gamma)} \chi Q_{\text{RAYL.}} \xrightarrow{(y \rightarrow y_c)} Q_{\text{RAYL.}}, \quad (135 \text{ a})$$

$$Q \xrightarrow{(\Theta \ll y\Gamma)} \chi \Gamma e^{x(1-\Gamma)} Q_{\text{WIEN}} \xrightarrow{(y \rightarrow y_c)} Q_{\text{WIEN}}, \quad (135 \text{ b})$$

wo  $\Theta$  die in der Einheit  $h\nu_0/k$  gemessene Temperatur ist:

$$\Theta = kT/(h\nu_0).$$

Dabei sind jedoch die beiden zum RAYLEIGHschen Gesetz führenden Bedingungen nur für den Fall  $y_c = 0$  allgemein verträglich, während umgekehrt die beiden zum WIENSchen Gesetz führenden Bedingungen nur im Fall  $y_c = \infty$  allgemein verträglich sind. In beiden Fällen folgt sogar die erste Bedingung aus der zweiten für beliebigen Wert der Temperatur  $T$ .

Somit verschwinden im ersten Fall ( $y_c = 0$ ) beim korrespondenzmäßigen Übergang  $y \rightarrow y_c$  mit den  $l$ -Effekten zugleich die Quanteneffekte, während im zweiten Fall ( $y_c = \infty$ ) beim korrespondenzmäßigen Übergang  $y \rightarrow y_c$  mit den  $l$ -Effekten auch die Wellen- oder Feldeigenschaften der Strahlung verschwinden. Diese Tatsache kann als Argument zugunsten der Auffassung betrachtet werden, daß nur der Fall  $y_c = 0$  physikalisch sinnvoll ist.

6. Was die experimentelle Verifizierung von Abweichungen vom PLANCKschen Gesetz betrifft, so ergeben einfache Überlegungen<sup>3</sup>, daß  $l$ -Effekte erster Ordnung bereits an den äußersten Grenzen der heutigen Meßmöglichkeiten liegen. Da die ersten nichtverschwindenden  $l$ -Effekte aller Voraussicht nach zweiter Ordnung sind, besteht zur Zeit kaum eine Hoffnung, durch direkte Messungen Abweichungen vom PLANCKschen Gesetz zu entdecken. Hingegen sollten sich die  $l$ -Effekte bei der COMPTON-Streuung hochenergetischer Photonen bemerkbar machen. So ergibt z. B. das in Abschnitt 15 betrachtete Modell an Stelle der alten Formel

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + [h\nu/(mc^2)](1 - \cos \Phi)}$$

die Verallgemeinerung

$$\nu' \Gamma' = \frac{\nu \Gamma}{1 + [h\nu\Gamma/(mc^2)](1 - \cos \Phi)} \quad [\Gamma' \equiv \Gamma(y')]. \quad (136)$$

Für das allgemeinere Modell von Abschnitt 16 ergibt die Energie-Impuls-Bilanz keine so einfache Formel, da sich hier die quadratischen Terme nicht mehr wegheben. Die allgemeine Formel für den COMPTON-Effekt lautet hier

$$B'^2(1 - \alpha'^2) + B^2(1 - \alpha^2) - 2B'B(1 - \alpha'\alpha \cos \Phi) + 2(B - B') = 0 \quad (137)$$

$$\text{mit} \quad B = \frac{h\nu\Gamma}{mc^2}, \quad B' = \frac{h\nu'\Gamma'}{mc^2}. \quad (138)$$

Für Streuwinkel in der Nähe von  $\pi/2$  ergibt dies näherungsweise

$$\nu' \Gamma' \simeq \frac{\nu \Gamma}{1 + [h\nu\Gamma/(mc^2)](1 - \alpha'\alpha \cos \Phi)}, \quad (139)$$

während sich für kleine Streuwinkel näherungsweise

$$\nu' \Gamma' \simeq \nu \Gamma \left[ 1 - \frac{h\nu\Gamma}{mc^2} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha'\alpha \cos \Phi \right) \right] \quad (140)$$

ergibt. Dabei ist  $\alpha c$  die Geschwindigkeit der hypothetischen Quasiteilchen des Modells.

Bei dieser Diskussion blieb unberücksichtigt, daß eine  $h$ - $c$ - $l$ -Elektrodynamik, welche die Wechselwir-

kung mit geladenen Teilchen einschließt, auch noch aus anderen Gründen zu Abweichungen von den alten Gesetzen der COMPTON-Streuung, insbesondere auch für die Intensitätsverteilung, führen kann<sup>20</sup>.

## V. Modelle und Interpretationen

### 14. Klassifizierung

Im Rahmen unserer Theorie (P 0 – P 4) sind die beiden Modellfunktionen  $g$  und  $G$ , bzw.  $\chi$  und  $T$ , nur den asymptotischen Korrespondenzbedingungen unterworfen und nur durch die thermodynamischen Konsistenzbedingungen asymptotisch miteinander verknüpft, d. h. sie sind im wesentlichen willkürlich und unabhängig voneinander. Andererseits führt jede  $h$ - $c$ - $l$ -Theorie zu einer vollständigen Bestimmung dieser Funktionen und damit auch zu einer Bestimmung ihrer wechselseitigen Abhängigkeit. Wir wollen jede Annahme, welche die beiden Funktionen  $g$  und  $G$  bzw.  $\chi$  und  $T$  zu berechnen erlaubt, ein *vollständiges Modell* nennen. Jede Annahme, die genau eine der beiden Funktionen  $g$  und  $G$  bzw.  $\chi$  und  $T$  zu berechnen erlaubt oder nur einen funktionalen Zusammenhang zwischen  $g$  und  $G$  bzw.  $\chi$  und  $T$  ergibt, wollen wir ein *unvollständiges Modell* nennen. In einem unvollständigen Modell bleibt also genau eine Funktion willkürlich.

Ferner sprechen wir von einem *Modell erster Art*, wenn in ihm der korrespondenzmäßige Grenzwert von  $y$  gleich 0 ist ( $y_c = 0$ ); ist dagegen  $y_c = \infty$ , so sprechen wir von einem *Modell zweiter Art*.

In einem Modell erster Art ist  $y_{\min} = 0$ , dagegen kann  $y_{\max}$  unendlich oder endlich sein. Entsprechend ist in einem Modell zweiter Art  $y_{\max} = \infty$ , während  $y_{\min}$  Null oder endlich sein kann. Modelle mit endlichem  $y_{\max}$  bzw.  $y_{\min}$  nennen wir *beschränkt*, die übrigen *unbeschränkt*. Bei den beschränkten Modellen werden wir annehmen, daß der jeweilige Grenzwert von  $y$  gleich 1 ist:

- (a) Modelle erster Art:  $y_c = y_{\min} = 0$ , (a)  
 (a1) unbeschränkt:  $y_{\max} = \infty$ , (a1)  
 (a2) beschränkt :  $y_{\max} = 1$ ; (a2)

- (b) Modelle zweiter Art:  $y_c = y_{\max} = \infty$ , (b)  
 (b1) unbeschränkt:  $y_{\min} = 0$ , (b1)  
 (b2) beschränkt :  $y_{\min} = 1$ . (b2)

### 15. Das Bornsche Modell (1938)

Um die bekannten Divergenzen in der Quantenfeldtheorie auszuschließen, wird in der Arbeit von BORN<sup>21</sup> im Impulsraum eine nichteuklidische Metrik eingeführt derart, daß das Volumenelement im Impulsraum durch

$$(B1) \quad d\Omega = dP_x dP_y dP_z / (1 - P^2/b^2) \quad (141B)$$

gegeben ist.

Vermöge der üblichen Annahmen

$$(B2) \quad N(P) = (2V/h^3) \int_{P_{\min}}^P d\Omega \quad (142B)$$

für die Anzahl der Freiheitsgrade und

$$(B3) \quad P = h \nu / c \quad (143B)$$

für den Impuls überträgt sich diese Metrik auf die Abzählung der Freiheitsgrade (Quantenzustände) pro Frequenzeinheit, so daß zu dem klassischen Ausdruck

$$n_\nu = (8\pi/c^3) \nu^2$$

$$\text{der Faktor} \quad \chi_{\text{BORN}} = (1 - y^2)^{-1/2} \quad (144B)$$

hinzutritt. Ferner wird in der BORNschen Arbeit angenommen, daß das Energiespektrum eines Strahlungsozillators nach wie vor durch

$$(B4) \quad \varepsilon_n(\nu) = n h \nu \quad (145B)$$

gegeben ist, was auf

$$Q_{\text{BORN}} = \chi_{\text{BORN}} Q_{\text{PLANCK}} \quad (146B)$$

führt.

Die BORNschen Annahmen (B1) bis (B4) führen also auf ein vollständiges beschränktes Modell erster Art ( $y_c = 0$ ,  $y_{\max} = 1$ ) mit

$$\chi_{\text{BORN}} = (1 - y^2)^{-1/2} \quad (144B)$$

$$\text{und} \quad T_{\text{BORN}} \equiv 1. \quad (147B)$$

Dieses Modell ist jedoch weder thermodynamisch noch in sich konsistent. Die thermodynamische In-

<sup>20</sup> Vgl. z. B. L. D. LANDAU in „Niels Bohr and the Development of Physics“, McGraw-Hill, New York—London—Paris 1955, p. 68.

<sup>21</sup> M. BORN, Proc. Roy. Soc., Lond. A **165**, 291 [1938]. — Die an dieser Arbeit in Anm. <sup>2</sup> geübte Kritik ist nur stich-

haltig, wenn man annimmt, daß keine Oszillatorenergien größer als  $h \nu_0$  auftreten ( $\nu_0$  BORNsche Maximalfrequenz). Die thermodynamische Inkonsistenz der BORNschen Annahmen wurde erstmalig in Anm. <sup>4</sup> erwähnt.

konsistenz ersieht man daraus, daß das Modell die zweite Konsistenzbedingung (127b) nicht erfüllt:

$$\lim_{y \rightarrow y_{\max}} [(127b)]_{\text{BORN}} = \frac{\pi/4}{e^{x_0} - 1}, \quad [x_0 \equiv h \nu_0 / (k T)]. \quad (148B)$$

Die innere Inkonsistenz ersieht man bei Berechnung des Spektraldruckes  $\pi(\nu, T)$  oder, damit gleichwertig, der Funktion  $G$ .

Zunächst ist wegen (147B)

$$G_{\text{BORN}} = g_{\text{BORN}}. \quad (149B)$$

Berechnet man den Spektraldruck auf Grund von B3 und B4 (Ideales Gas von Teilchen der Ruhmasse Null), so ergibt sich

$$G_{\text{BORN}} = g_{\text{BORN}} = \frac{1}{3}. \quad (150B)$$

Andererseits folgt aus (144B) gemäß (92)

$$G_{\text{BORN}} = g_{\text{BORN}} = y^{-3} \sqrt{1 - y^2} [\arcsin y - y \sqrt{1 - y^2}]. \quad (151B)$$

Es nützt auch nichts, das Postulat P 2 (schwacher Adiabatenatz) fallen zu lassen. Dann sind zwar die Gln. (92) und (127), die auf P 2 beruhen, nicht mehr benutzbar, so daß (148B) und (151B) wegfallen. Mit (150B) wird dann aber

$$\lim_{y \rightarrow 1} [y g_{\text{BORN}}]_{\text{BORN}} = \infty \quad (\text{statt } 0), \quad (152B)$$

d. h. die thermodynamische Inkonsistenz bleibt bestehen. — In der BORNSchen Arbeit fällt diese Inkonsistenz zunächst nicht auf, weil dort auf die Angabe der spektralen Druckdichte verzichtet und nur der Gesamtdruck berechnet wird.

Der tiefere Grund für die thermodynamische Inkonsistenz des BORNSchen Modells liegt offenbar in der unbegründeten Annahme, daß eine Abänderung der Wellenkinematik gemäß (144B) bzw. der Metrik im Impulsraum gemäß (141B) keinen Einfluß auf das Energiespektrum des Strahlungssoszillators hat ( $I \equiv 1$ ). Man sieht leicht, daß die Inkonsistenz zum Verschwinden gebracht werden kann, wenn man diese unbegründete Annahme fallen läßt. Ersetzt man nämlich (145B) durch die allgemeinere Formel

$$\varepsilon_n(\nu) = n h \nu I(y)$$

und entsprechend (143B) durch

$$P = (h \nu / c) I(y),$$

so ergibt die BORNSche Metrik (141B) nicht (144B), sondern

$$\chi_{\text{BORN}}^* = \gamma^{-1} I^3 [1 - (y I / b_m)^2]^{-1/2}, \quad [b_m \equiv (y I)_{\max}]. \quad (144B^*)$$

In diesem allgemeineren Modell bleibt also eine Funktion frei verfügbar (unvollständiges Modell!). Diese Freiheit kann man dazu benutzen, die Konsistenzbedingungen zu erfüllen.

Wir werden jedoch dieses verallgemeinerte BORNSche Modell hier nicht weiterverfolgen, da uns die Grundannahme eines geschlossenen Impulsraumes nicht hinreichend begründet erscheint.

## 16. Ideale Gas-Modelle mit verschwindender Ruhmasse

Da für einen Strahlungssoszillator mit dem Energiespektrum

$$\varepsilon_n(\nu) = n h \nu I(y) \quad (124)$$

der kanonische Mittelwert

$$U^{(v)}(\nu, T) = h \nu I / (e^{x I} - 1) \quad [x \equiv h \nu / (k T)]$$

mit dem BOSESchen Mittelwert übereinstimmt, kann man im Sinne der BOSE-Statistik die Quantenzahl  $n$  auch als Anzahl der Teilchen mit der Energie

$$\varepsilon = h \nu I$$

auffassen. Es liegt dann nahe, diese Gleichung durch

$$P \text{ 5a} \quad c \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{e} = h \nu I \mathbf{e} \quad (153)$$

zu ergänzen, wo  $\mathbf{P}$  der Impuls der Teilchen mit der Energie  $\varepsilon$  sein soll;  $\mathbf{e}$  bedeutet den Einheitsvektor.

Diese Formeln, die sich zunächst nur auf die eingeschlossene Strahlung beziehen, lassen sich ohne weiteres auf die freie (uneingeschlossene) Strahlung übertragen. Dabei bleibt lediglich offen, ob die Größen

$$\{c \mathbf{P}, \varepsilon\} = h I(y) \{v \mathbf{e}, v\} \quad (154)$$

$$\text{oder die Größen} \quad \{v \mathbf{e}, v\} \quad (155)$$

einen Vierervektor bilden. In beiden Fällen gilt jedenfalls die LORENTZ-invariante Beziehung

$$c^2 P^2 - \varepsilon^2 = 0. \quad (156)$$

Insbesondere bleibt also hier die Ruhmasse der Photonen exakt gleich Null.

Berechnet man nun mit Hilfe der üblichen Formel

$$P \text{ 6} \quad N(P) = 8 \pi V h^{-3} \int_{P_{\min}}^P P^2 dP \quad (157)$$

mit Benutzung von (153) die Größe

$$n_\nu = (8 \pi \nu^2 / c^3) \chi(y),$$

so findet man

$$\chi = I^3 [1 + y I y / I] = \gamma^{-1} I^3. \quad (158)$$

Man kann jetzt jede der Funktionen  $\Gamma$ ,  $\gamma$ ,  $g$ ,  $\chi$  durch jede von ihnen ausdrücken; nur  $G$  bildet eine Ausnahme, da es sich als konstant erweist. Die Durchrechnung ergibt

$$\Gamma^3[\chi] = 3 y^{-3} \int_{y_{\min}}^y y'^2 \chi dy', \quad (159)$$

$$\gamma[\chi] = 3 (y^3 \chi)^{-1} \int_{y_{\min}}^y y'^2 \chi dy', \quad (160)$$

$$g[\chi] = (y^3 \chi)^{-1} \int_{y_{\min}}^y y'^2 \chi dy', \quad (161)$$

$$G = 1/3, \quad (162)$$

$$\gamma[g] = 3 g, \quad \Gamma[g] = \exp \int_{y_c}^y \frac{1-3g}{3 y' g} dy', \quad (163), (164)$$

$$\chi[\gamma] = \gamma^{-1} \exp \left( 3 \int_{y_c}^y \frac{1-\gamma}{y'} dy' \right), \quad g[\gamma] = \frac{1}{3} \gamma, \quad (165), (166)$$

$$g[\Gamma] = \frac{1}{3} \frac{\Gamma}{\Gamma + y \Gamma_y}, \quad \chi[\Gamma] = (\Gamma + y \Gamma_y) \Gamma^2. \quad (167), (168)$$

Das Resultat (162) entspricht der Erwartung:  $G = 1/3$  ist charakteristisch für ein ideales Gas von Teilchen der Ruhmasse Null. Als direkte Folge von  $G = 1/3$  gilt wieder das  $T^4$ -Gesetz für die integrale Strahlungsdichte  $\overset{\circ}{u}(T)$ . In der Tat wird

$$\overset{\circ}{u}(T) = \int_{(v)} q dv = a T^4 \quad (169)$$

mit dem alten Wert von  $a$ :

$$a = a_{\text{PLANCK}} = (8 \pi / c^3) (k/h)^4 \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{e^z - 1}. \quad (170)$$

[Die dabei zur Festlegung der Integrationsgrenzen benutzten Bedingungen

$$\lim_{y \rightarrow y_{\min}} y \Gamma = 0, \quad (171a) \quad \lim_{y \rightarrow y_{\max}} y \Gamma = \infty \quad (171b)$$

sind mit den Konsistenzbedingungen (79) äquivalent, da hier

$$y g q = A (y \Gamma)^4 / (e^{x_0 y \Gamma} - 1), \quad [x_0 \equiv h \nu_0 / (k T)] \quad (172)$$

wird.] Unabhängig von der Wahl der willkürlichen Funktion erhält man also bei konsistenter Vervollständi-

gung dieses Modells für alle integralen thermodynamischen Größen stets exakt die gleichen Resultate wie in der alten Theorie. Dabei kann man es durch passende Wahl der freien Funktion noch so einrichten, daß z. B. das WIENSche Verschiebungsgesetz im beobachteten Frequenzbereich beliebig gut approximiert wird.

Die Konsistenz- und Korrespondenzbedingungen können auf viele Weisen erfüllt werden, z. B. durch die Funktionen

$$\Gamma = \Gamma_1(y) \equiv 1 + \ln(1 + y),$$

$$\Gamma = \Gamma_2(y) \equiv 1 + \sum_1^m a^n y^n, \quad \Gamma = \Gamma_3(y) \equiv e^y,$$

die sämtlich unbeschränkte Modelle erster Art liefern. Es lassen sich auch Modelle jeden anderen Typs konstruieren.

Das durch P 5a (153) und P 6 (157) definierte (unvollständige) Modell ist offenbar die harmloseste thermodynamisch konsistente Verallgemeinerung der alten Theorie. Die Teilchen dieses Modells unterscheiden sich von den Photonen der alten Theorie nur dadurch, daß die Umrechnung von Energie-Impuls auf die entsprechenden wellenkinematischen Größen nicht mehr homogen-linear ist. Es besteht demnach zwar noch eine Zuordnung zwischen Wellen- und Korpuskelbild, aber diese Zuordnung hat nicht mehr den Charakter einer Isomorphie bezüglich kovarianter Operationen, da — in leichtverständlicher symbolischer Schreibweise — aus

$$\overset{1}{P}^\mu = h \Gamma \cdot \overset{1}{k}^\mu, \quad \overset{2}{P}^\mu = h \Gamma \cdot \overset{2}{k}^\mu$$

$$\text{nicht mehr} \quad \overset{1}{P}^\mu + \overset{2}{P}^\mu = h \Gamma \cdot (\overset{1}{k}^\mu + \overset{2}{k}^\mu)$$

$$\text{folgt, weil} \quad \Gamma \cdot (\overset{1}{k} + \overset{2}{k}) \neq \Gamma \cdot \overset{1}{k}^\mu + \Gamma \cdot \overset{2}{k}^\mu$$

ist. Der physikalische Grund hierfür dürfte darin zu suchen sein, daß in der entsprechenden  $h$ - $c$ - $l$ -Theorie das Superpositionsprinzip nicht mehr gilt, so daß die Superposition zweier ebener Wellen, selbst wenn diese Lösungen der Feldgleichungen sind, nicht mehr eine Lösung der Feldgleichungen darstellt<sup>22</sup>.

Es erscheint jedoch wenig wahrscheinlich, daß die richtige  $h$ - $c$ - $l$ -Theorie ein Ideales Gas-Modell mit  $G = 1/3$  liefert, da erfahrungsgemäß eine Abände-

<sup>22</sup> Tatsächlich ist in der BORN-InfELDSchen Elektrodynamik die Superposition von zwei ebenen Wellen gleicher Frequenz, die Lösungen der BORN-InfELDSchen Gleichungen sind, im allg. keine Lösung dieser Gleichungen. — In diesem Zusammenhang sei auch auf die Diskussion der Gra-

vitationswechselwirkung zwischen Lichtstrahlen hingewiesen, wo sich ähnliche Verhältnisse ergeben; vgl. R. C. TOLMAN, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Clarendon Press, Oxford 1934–1958, insbes. §§ 113, 114.

nung der Kinematik ( $g \neq 1/3$ ,  $\chi \neq 1$ ) im allgemeinen auch eine Abänderung der Dynamik ( $G \neq 1/3$ ) nach sich zieht.

Ein weiteres Argument ist folgendes.  $G=1/3$  ist gleichbedeutend damit, daß die Spur des Impuls-Energie-Tensors des elektromagnetischen Feldes verschwindet. Das Verschwinden dieser Spur ist aber wiederum gleichbedeutend damit, daß die Theorie gegenüber konformen Transformationen der Metrik invariant ist, sofern man nur den Impuls-Energie-Tensor mit dem metrischen Impuls-Energie-Tensor der Theorie identifiziert<sup>23, 24</sup>. Wie bereits in der Einführung (Teil I) betont, kann aber mit einer Aufrechterhaltung der konformen Invarianz insbesondere in einer einheitlichen Theorie nicht gerechnet werden. Infolgedessen wird die  $h$ - $c$ - $l$ -Theorie aller Voraussicht nach zu  $G \neq 1/3$ , d. h. zu  $G=G(y)$ , führen.

### 17. Allgemeine korpuskulare Interpretation. Quasiteilchen

Gibt man (153) und damit die idealen Gasmodelle mit verschwindender Ruhmasse auf, so bietet sich kein hinreichend allgemeines Postulat an, das eine Reduktion der zwei willkürlichen Funktionen auf nur eine Funktion ermöglicht. Insbesondere sind relativistische Invarianzforderungen fehl am Platz, da jedes eingeschlossene thermodynamische System ein ausgezeichnetes Bezugssystem definiert und demgemäß die übliche Transformation thermodynamischer Größen einen rein konventionellen Charakter hat<sup>25</sup>. Man kann jedoch den umgekehrten Weg gehen und eine dritte unbestimmte Funktion  $\alpha(y)$  einführen. In einem zweiten Schritt kann man dann eine Relation zwischen den drei unbestimmten Funktionen postulieren und damit jede der ursprünglichen Funktionen durch  $\alpha(y)$  und eine beliebige der ursprünglichen Funktionen ausdrücken. Vom formalen Standpunkt ist dies nur eine Umfor-

mulierung der Theorie. Man kann es jedoch so einrichten, daß  $\alpha(y)$  und die postulierte Relation eine einfache physikalische Bedeutung haben. Man erhält dann eine gewisse physikalische Interpretation der gesamten Theorie, insbesondere also ihrer Abweichungen von der alten  $h$ - $c$ -Theorie.

Die Interpretation, die wir dem genannten Verfahren zugrunde legen werden, kann als *allgemeine korpuskulare Interpretation* bezeichnet werden. Wir führen nämlich die neue Funktion  $\alpha(y)$  durch die Gleichung

$$P \mathbf{P} = h \nu \Gamma \alpha \mathbf{e}, \quad \alpha = \alpha(y), \quad \alpha(y_c) = 1 \quad (173)$$

ein, die eine Verallgemeinerung von (153) darstellt. Offenbar ist dann  $\alpha$  als die (in der Einheit  $c$  gemessene) Geschwindigkeit eines „Teilchens“ mit der Energie  $\varepsilon = h \nu \Gamma$  zu betrachten. Gemäß der traditionellen Definition

$$m^2 c^4 \equiv \varepsilon^2 - c^2 P^2 = (h \nu_0)^2 (y \Gamma)^2 [1 - x^2] \quad (174)$$

besitzen diese „Teilchen“ eine frequenzabhängige Quasimasse  $m = m(y^2)$  mit  $m \rightarrow 0$  für  $y \rightarrow y_c$ , die als Resultat einer Resonanz- oder Selbstwechselwirkung gedeutet werden kann. Die so definierten Teilchen nennen wir *Quasiteilchen*.

Solange man nur die eingeschlossene Strahlung betrachtet, bietet diese Interpretation keinerlei grundsätzliche Schwierigkeit, da dann definitionsgemäß alle vorkommenden Größen als Invarianten aufzufassen sind.

Es ist jedoch nicht mehr möglich, diese Interpretation auf die freie (nichteingeschlossene) Strahlung zu übertragen, ohne mit der Mechanik freier Teilchen in Widerspruch zu geraten, da jetzt  $\{\varepsilon, c \mathbf{P}\}$  offensichtlich keinen Vierervektor bildet. Wir betrachten dies jedoch nicht als Verletzung der Relativitätstheorie, sondern als eine Verallgemeinerung der Mechanik freier Teilchen zu einer Mechanik unfreier (unselbständiger) Teilchen (*Quasiteilchen*). Die Alternative hierzu besteht darin, daß man die Übertragung der Formeln (173) und (174) auf die freie Strahlung untersagt. Dabei kann

Formeln auch nicht als eine neuartige Darstellung der LORENTZ-Gruppe auffassen. Sie sind somit mathematisch ohne Fundament. Dem entspricht, daß sich auch in der physikalischen Literatur keine Angabe darüber finden läßt, was unter „Temperatur eines bewegten abgeschlossenen Systems“ zu verstehen ist. — Zum Unterschied von der traditionellen sog. „relativistischen Thermodynamik“ behandelt die relativistische Thermodynamik irreversibler Prozesse die Temperatur als Invariante. Vgl. z. B. J. MEIXNER u. H. G. REIK, Thermodynamik der irreversiblen Prozesse, in S. FLÜGGE, Handbuch der Physik III, 2. Kap. E. Springer-Verlag, Berlin 1959.

<sup>23</sup> A. TRAUTMAN, Bull. Int. Acad. Polonaise Sci. Lett. Cl. III, 4, 679 [1956].

<sup>24</sup> H. STEUDEL, Ann. Phys., Lpz. 7. Folge (im Erscheinen).

<sup>25</sup> In der traditionellen „relativistischen Thermodynamik“ werden Temperatur und Wärmemenge als nicht-invariante Skalare behandelt ( $T' = \chi^{-1} T$ ,  $Q' = \chi^{-1} Q$ ). Trotz der scheinbaren Ähnlichkeit dieser Formeln zu den Transformationsformeln für räumliche und zeitliche Abstände besteht hier ein grundlegender Unterschied: die letztgenannten Formeln folgen zwangsläufig aus der Definition dieser Größen als Projektionen von Vierervektoren! Bisher hat aber noch niemand den zur Temperatur gehörigen Vierervektor entdeckt. Andererseits lassen sich die angeführten

man sich darauf berufen, daß eine derartige Übertragung ein gleichartiges Verhalten von eingeschlossener und freier Strahlung voraussetzt, und daß in der alten Theorie diese Voraussetzung letzten Endes nur deshalb erfüllt ist, weil dort eine Eigenschwingung (stehende Welle) der Eigenfrequenz  $\nu$  als Superposition zweier fortschreitender Wellen gleicher Frequenz aufgefaßt werden kann. In einer  $h$ - $c$ - $l$ -Theorie des elektromagnetischen Feldes, in der das Superpositionsprinzip nicht mehr gilt, wird diese Voraussetzung nicht erfüllt sein<sup>22</sup>.

Für das Weitere ist die genannte Alternative ohne Belang, da sich alle folgenden Formeln wieder auf die eingeschlossene Strahlung beziehen.

Der zweite Schritt besteht nun darin, daß wir wieder die Formel (157) zur Berechnung der Anzahl der Freiheitsgrade benutzen. Dies ergibt

$$\chi = (\alpha I)^3 \left[ 1 + \frac{y(\alpha I)_y}{\alpha I} \right]. \quad (175)$$

Gegenüber den Idealen Gas-Modellen mit verschwindender Ruhmasse ist hier  $I$  durch  $\alpha I$  ersetzt.

Die Durchführung des obigen Programms ergibt u. a. folgendes:

$$I^3[\chi, \alpha] = 3(\alpha y)^{-3} \int_{y_{\min}}^y y'^2 \chi dy', \quad (176)$$

$$\chi[I, \alpha] = (\alpha I)^2 [\alpha I + y(\alpha I)_y], \quad (177)$$

$$g[I, \alpha] = \frac{1}{3} \frac{\alpha I}{\alpha I + y(\alpha I)_y}, \quad (178)$$

$$\chi[\gamma, \alpha] = \left( \gamma^{-1} + \frac{y \alpha y}{\alpha} \right) x^3 \exp \left( 3 \int_{y_0}^y \frac{1-\gamma}{y' \gamma} dy' \right), \quad (179)$$

$$g[\gamma, \alpha] = \frac{1}{3} \left[ \gamma^{-1} + \frac{y \alpha y}{\alpha} \right]^{-1}, \quad (180)$$

$$G[\gamma, \alpha] = \frac{1}{3} \left[ 1 + \gamma \frac{y \alpha y}{\alpha} \right]^{-1}. \quad (181)$$

Die letzte Gleichung läßt eine interessante Schlußfolgerung zu. Für ein ideales relativistisches Gas gilt

$$G_{\text{id.}} = \frac{1}{3} (1 + \eta^{-1}), \quad \eta^{-1} \equiv \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad (182)$$

$$\text{so daß} \quad \frac{1}{3} \leq G_{\text{id.}} \leq \frac{2}{3}, \quad (183)$$

wobei  $1/3$  den extrem relativistischen Grenzfall ( $\alpha \rightarrow 1$ ) und  $2/3$  den unrelativistischen Grenzfall ( $\alpha \rightarrow 0$ ) darstellt. Andererseits lautet für Modelle erster bzw. zweiter Art die Korrespondenzforderung für  $\alpha$  offenbar

$$\lim_{y \rightarrow 0} \alpha(y) = 1 \quad (y_c = 0) \quad (184a)$$

$$\text{bzw.} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \alpha(y) = 1 \quad (y_c = \infty). \quad (184b)$$

Da  $\alpha$  nicht größer als 1 sein kann, folgt daraus

$$\alpha_y < 0 \quad \text{für } y_c = 0, \quad \alpha_y > 0 \quad \text{für } y_c = \infty. \quad (185a, b)$$

Damit führt (181) auf

$$G > \frac{1}{3} \quad \text{für } y_c = 0, \quad G < \frac{1}{3} \quad \text{für } y_c = \infty. \quad (186a, b)$$

In einem Modell zweiter Art ( $y_c = \infty$ ) wäre also der spektrale Druck kleiner als der Minimalwert beim idealen Gas, d. h. es müßte zwischen den Photonen gleicher Frequenz eine Art anziehende Wechselwirkung stattfinden, so daß man es mit einem nichtidealen Gas zu tun hätte. (Dieser Fall könnte sich vielleicht ergeben, wenn man die Gravitationswechselwirkung der Photonen im Rahmen der EINSTEINSCHEN Theorie mit kosmologischem Glied berücksichtigt.) Dagegen widerspricht (186a) der Idealen Gas-Bedingung (183) nicht, falls die maximale Abweichung der Funktion  $G$  vom extrem-relativistischen unteren Grenzwert den Wert  $1/3$  nicht überschreitet.

Natürlich stellt der Begriff einer frequenzabhängigen Quasimasse nur einen Versuch dar, gewisse Ergebnisse, die in einer  $h$ - $c$ - $l$ -Elektrodynamik zu erwarten sind, in der Sprache der alten Theorie auszudrücken; es ist klar, daß jeder derartige Versuch zunächst zu begrifflichen Schwierigkeiten führen muß, die sich nur vom Standpunkt der neuen Theorie aus aufklären lassen.

## A N N A N G

### Der Fall $G_x \neq 0$ – Iterationsverfahren zur Lösung der unverkürzten thermodynamischen Diff.-Gl. (109)

Läßt man das Postulat P 3 fallen, so ist im allgemeinen  $G_x \neq 0$ . Es gilt dann nur die unverkürzte Diff.-Gl. (109), die eine allgemeine Lösung in geschlossener Form nicht zuläßt. Zu ihrer Lösung kann man das im folgenden angegebenen Iterationsverfahren benutzen, bei dem die Lösung für  $G_x = 0$  als nullte Näherung betrachtet wird.

Das Verfahren wird besonders einfach, wenn man an Stelle der Funktion  $\Phi$  die Funktion

$$w = y \Phi \quad (A1)$$

einführt, da dann die nullte Näherung

$$\overset{\circ}{w} = y I' / (e^x I - 1) = \bar{y} / (e^{\bar{x}} - 1) \quad (A2)$$

lautet. Für die Umrechnung auf die neuen Variablen

$$\bar{x} = x I, \quad \bar{y} = y I' \quad (A3)$$

gelten die Formeln

$$x \frac{\partial}{\partial x} = \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \quad (\text{A4})$$

$$y \frac{\partial}{\partial y} = \gamma^{-1} \bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} + \frac{y \Gamma y}{\Gamma} \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \quad (\text{A5})$$

$$= \gamma^{-1} \bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} + (\gamma^{-1} - 1) \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \quad (\text{A6})$$

letzteres wegen (102). In den alten Variablen folgt nun zunächst aus (109)

$$\overset{\circ}{G}[w + x w_x] + w x G_x = g[x w_x + y w_y], \quad (\text{A7})$$

$$\text{also } \overset{\circ}{G}[w + x w_x] = g[x w_x + y w_y]. \quad (\text{A8})$$

Mit  $\overset{\circ}{G}$  bezeichnen wir hier die nullte Näherung von  $G$ , die von  $x$  unabhängig ist. Mit der Abkürzung

$$R = G/\overset{\circ}{G} \quad (\text{A9})$$

erhält man aus (A7), (A8) nach Umrechnung auf die neuen Variablen bei Beachtung von (A2) schließlich

$$\boxed{R w + \bar{x} (R w)_{\bar{x}} = \bar{x} w_x + \bar{y} w_{\bar{y}}}. \quad (\text{A10})$$

Das Iterationsverfahren läuft jetzt wie folgt:

$${}^{k-1} w R + \bar{x} ({}^{k-1} w R)_{\bar{x}} = \bar{x} {}^{k-1} w_x + \bar{y} {}^{k-1} w_{\bar{y}}, \quad (\text{A11})$$

$${}^k w R + \bar{x} ({}^k w R)_{\bar{x}} = \bar{x} {}^k w_x + \bar{y} {}^k w_{\bar{y}}, \quad (\text{A12})$$

$${}^k w R + \bar{x} ({}^k w R)_{\bar{x}} = \bar{x} {}^k w_x + \bar{y} {}^k w_{\bar{y}}. \quad (\text{A13})$$

$${}^{k+1} w + \bar{x} {}^{k+1} R_{\bar{x}} = \bar{x} {}^{k+1} w_x + \bar{y} {}^{k+1} w_{\bar{y}}, \quad (\text{A14})$$

Dabei ist aufzufassen

$$(\text{A11}) \text{ als Diff.-Gl. für } {}^k R \text{ bei konstantem } {}^{k-1} w,$$

$$(\text{A12}) \text{ als Diff.-Gl. für } {}^k w \text{ bei konstantem } {}^k R,$$

$$(\text{A13}) \text{ als Diff.-Gl. für } {}^{k+1} R \text{ bei konstantem } {}^k w,$$

$$(\text{A14}) \text{ als Diff.-Gl. für } {}^{k+1} w \text{ bei konstantem } {}^{k+1} R.$$

Für die Funktionen  $R$  lassen sich Rekursionsformeln finden. Zunächst lautet die allgemeine Lösung von (A10)

$$R w = w + \frac{1}{\bar{x}} \int [\bar{y} w_{\bar{y}} - w] d\bar{x} + \frac{1}{\bar{x}} \psi, \quad (\text{A15})$$

wo  $\psi$  eine beliebige Funktion von  $\bar{y}$  ist. Wendet man dies auf (A13) an und setzt  $\bar{y} w_{\bar{y}}$  aus (A12) ein, so erhält man nach einer partiellen Integration

$$\boxed{{}^{k+1} R = {}^k R + \psi_{k+1}/\bar{x} w}. \quad (\text{A16})$$

Ferner lassen sich die Diff.-Gln. für die  $w$  durch einfachere ersetzen, wenn man die „Rekursionsfaktoren“  $f_k$  gemäß

$$\boxed{{}^k w = {}^{k-1} w f_k} \quad (\text{A17})$$

einführt. Man erhält dann bei Beachtung von (A16)

$$\boxed{\left\{ (1 - R) \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right\} \ln f_k = 0}. \quad (\text{A18})$$

Die drei letzten Formeln können an Stelle des ursprünglichen Gleichungssystems benutzt werden. Die Willkür der auf jeder Näherungsstufe auftretenden Funktionen  $\psi_k$  kann dazu benutzt werden, die „Randbedingung“

$$G(x, 0) = 1/3$$

auf jeder Stufe der Approximation zu erfüllen.